Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Lehrstuhl für Mathematik VI

# Über lineare hyperbolische Systeme von Differentialgleichungen

Bachelorarbeit zur Erlangung des akademischen Grades

Bachelor of Science
in Mathematischer Physik

eingereicht von Fabian Bleitner

betreut durch Prof. Dr. Christian Klingenberg

Würzburg, 14. Februar 2017

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

Hyperbolische Differentialgleichungen spielen eine große Rolle in vielen physikalischen Systemen. So geben die *Telegraphengleichungen*

$$\begin{aligned} \partial_x U &= -L\partial_t I \\ \partial_x I &= -C\partial_t U \end{aligned}$$

an, wie sich Spannung $U$ und Stromstärke $I$ innerhalb einer verlustfreien Leitung ausbreiten und die *Maxwellgleichungen* im Vakuum

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E &= 0 & \operatorname{div} B &= 0 \\ \operatorname{rot} E &= -\partial_t B & \operatorname{rot} B &= \mu_0\epsilon_0\partial_t E \end{aligned}$$

spiegeln das Verhalten der elektrischen Feldstärke $E$, beziehungsweise der magnetischen Flussdichte $B$ wider. Beide Systeme führen zur *Wellengleichung*

$$\partial_{tt}u - c^2\Delta u = 0,$$

dem Paradebeispiel hyperbolischer Differentialgleichungen. Die eindimensionale Verkehrsdichte $u$ kann mittels der *Burgersgleichung*

$$\partial_t u + u\partial_x u = 0$$

modelliert werden und die *Euler-Gleichung*

$$\rho\partial_t v + \rho(v\cdot\nabla)v + \operatorname{grad} p = \rho g$$

beschreibt die Strömung einer reibungsfreien, elastischen Flüssigkeit. $v$ entspricht hierbei der Geschwindigkeit, $\rho$ der Dichte, $p$ dem Druck und $g$ einer äußeren Beschleunigung, beispielsweise der Gravitation.

Aufgrund der Bedeutsamkeit hyperbolische Differentialgleichungen wollen wir untersuchen aus welchen Prinzipien sie hervorgehen und Eigenschaften ihrer Lösungen ermitteln. Dazu beschränken wir uns auf lineare Gleichungen, die zunächst konstante Koeffizienten haben sollen. Anschließend wird ein sich räumlich und zeitlich veränderndes System untersucht. Um die Arbeit abzuschließen wollen wir die vorher gefundenen Besonderheiten anhand der Wellengleichung verifizieren und diese lösen.

# 2 Grundlagen hyperbolischer Gleichungen

Einen realitätsnahen Bezug zu hyperbolischen Systemen geben die Bewegungen kontinuierlicher Medien, welche wir nun untersuchen wollen. Dabei folgen wir der Vorgehensweise von Peter Lax [5, Kap. 1 - 3.1].

## 2.1 Differentialgleichungen kontinuierlicher Medien

Der Zustand eines Mediums zu einer beliebigen Zeit $t \in \mathbb{R}$ an einem beliebigen Ort $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ sei durch $n$ Variablen, wie zum Beispiel Dichte, Druck, elektrische Feldstärke, ... festgelegt. Wir schreiben die Zustände der Variablen als $u_1, \ldots, u_n$ oder als zusammengefassten Vektor $u$. Der Gesamtzustand eines Mediums zur Zeit $t$ ist somit durch die Vektorfunktion $u(x,t)$ gegeben. Den zeitlichen Verlauf dieser Funktion nennen wir *Bewegung*.
Die Bewegungen, mit denen wir uns auseinandersetzen, besitzen folgende Eigenschaften:

(1) Die Bewegung ist eindeutig durch ihre Anfangsdaten bestimmt.

(2) Die aus beliebig oft differenzierbaren Anfangsdaten resultierenden Bewegungen sind beliebig oft differenzierbar in Ort und Zeit.

(3) Linearkombinationen von Bewegungen stellen Bewegungen dar.

(4) Der Einflussbereich breitet sich mit endlicher Geschwindigkeit aus.

***Definition 2.1***
Der Punkt $p = (s, x)$ wird *Einflusspunkt* des Raumzeitpunktes $q$ genannt, falls für eine räumliche Umgebung $O$ von $x$ und eine Raumzeitumgebung $D$ von $q$ zwei Bewegungen $u$ und $v$ existieren, die zur Zeit $s$ außerhalb von $O$ gleich sind, aber verschieden in einem Punkt in $D$.

Aufgrund von Eigenschaft (3) können wir dies umschreiben. $p$ beeinflusst $q$, wenn es eine Bewegung $u$ gibt, die zur Zeit $s$ Null ist außerhalb von $O$, aber ungleich Null in einem Punkt in $D$.

***Definition 2.2***
Der *Einflussbereich* von $p$ ist die Menge aller Punkte $q$, die von $p$ beeinflusst werden.

***Definition 2.3***
Der *Abhängigkeitsbereich* von $p$ ist die Menge aller Punkte $q$, die $p$ beeinflussen.

Durch beliebig oft differenzierbare Anfangsdaten ist nach Eigenschaft (1) der Zustand $u(x,s)$ für alle Zeiten $s$ bestimmt. Mit Bedingung (2) ist ebenso $u_t(x,s) = \partial_t u(x,t)\Big|_{t=s}$ gegeben, weshalb wir den Operator der $u$ auf $u_t$ abbildet als $G = G(s)$ schreiben können und

$$u_t = Gu \tag{2.1.1}$$

erhalten. Nach Eigenschaften (3) und (2) ist $G$ linear und bildet alle beliebig oft in $x$ differenzierbaren Funktionen in den Raum der in $x$ beliebig oft differenzierbaren Funktionen ab. Außerdem ist $G$ ein *lokaler Operator* in dem Sinne, dass der Träger von $Gf$ im Träger von $f$ enthalten ist. Das heißt, wenn $f$ für alle $x$ einer offenen Menge $U$ verschwindet, so verschwindet dort auch $Gf$.

Um dies zu zeigen, sei $u(x,s) = 0$ für alle $x \in U$. Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Einflussbereichs endlich ist, existiert eine Konstante $c$, sodass $u(x, s+h)$ für alle $x$ mit größerem Abstand als $c|h|$ vom Kompliment von $U$ verschwindet. Da die Ableitung von $u$ in $t$ zur Zeit $s$ durch $u_t = \lim_{h\to 0} \frac{u(x,s+h)}{h}$ gegeben ist, verschwindet auch $u_t = Gu$ in $U$ und $G$ ist lokal.

Nach Jaak Peetre [6] ist jeder lokale, lineare Operator, der von $C^\infty$ nach $C^\infty$ abbildet, ein partieller Differentialoperator mit in $x$ differenzierbaren Koeffizienten. Außerdem hängen die Koeffizienten von $G$ differenzierbar von $s$ ab.

Bewegungen, die Eigenschaften (1)-(4) genügen, erfüllen somit partielle Differentialgleichungen. Es soll nun untersucht werden, welche algebraischen Eigenschaften diese Bewegungen mit sich bringen. Dazu seien diese zunächst translationsinvariant in dem Sinne, dass wenn $u(x,t)$ eine solche Bewegung darstellt, so auch $u(x-y, t-s)$ für jedes feste $y$ und $s$. Wir betrachten die Fouriertransformation

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^k} f(x) e^{-ix\xi}\, dx.$$

Die Einträge des Operators $G$ können als Polynome in $\partial_x$, dem vektorwertigen Differentialoperator $\partial_x = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_k})$, geschrieben werden. Da Differentiation unter Fouriertransformation in Multiplikation mit $i\xi$ übergeht, gilt

$$\widetilde{Gu} = G(i\xi)\tilde{u} \tag{2.1.2}$$

und aus Gleichung 2.1.1 folgt

$$\tilde{u}_t = G(i\xi)\tilde{u}.$$

Diese Differentialgleichung hat für Anfangsdaten $\tilde{f}(\xi)$ die eindeutige Lösung

$$\tilde{u}(\xi, t) = e^{tG(i\xi)} \tilde{f}(\xi), \tag{2.1.3}$$

woraus $u(x,t)$ durch Rücktransformation hervorgeht. Außerdem löst nicht nur jede Bewegung die Differentialgleichung 2.1.1, sondern jede Lösung von Gleichung 2.1.1 mit kompaktem Träger für alle Zeiten ist eine Bewegung. Hierauf werden wir in Kapitel 2.2 eingehen.

***Satz 2.4***
*Bewegungen hängen stetig von ihren Anfangsdaten ab.*

*Beweis*
Sei $F$ die Menge aller Anfangsdaten $f \in C^\infty$ mit kompaktem Träger $K$ und $U$ die Menge aller auf $-1 \leq t \leq 1$ eingeschränkten Funktionen $u \in C^\infty$ mit Träger innerhalb des Einflussbereichs von $K$, der nach Eigenschaft (4) ebenso kompakt ist. So bilden $F$ und $U$ vollständige Vektorräume und die Abbildung $\phi$, die Anfangsdaten aus $F$ auf die zugehörigen Bewegungen abbildet, besitzt folgende Eigenschaften:

(i) $\phi$ ist linear, denn für beliebige Bewegungen $\bar{u}(x,t)$ und $\hat{u}(x,t)$ ist $u(x,t) \equiv a\bar{u}(x,t) + \hat{u}(x,t)$ nach Eigenschaft (3) wieder eine Bewegung und für die zur Zeit $t = s$ vorgegebenen Anfangsdaten gilt $f(x) \equiv u(x,s) \equiv a\bar{u}(x,s) + \hat{u}(x,s) \equiv a\bar{f}(x) + \hat{f}(x)$. Alle Bewegungen sind eindeutig durch ihre Anfangsdaten bestimmt, das heißt

$$\begin{aligned} \phi(\bar{f}(x)) &= \bar{u}(x,t), \\ \phi(\hat{f}(x)) &= \hat{u}(x,t), \\ \phi(f(x)) &= u(x,t), \end{aligned}$$

weshalb wir

$$a\phi(\bar{f}(x)) + \phi(\hat{f}(x)) = a\bar{u}(x,t) + \hat{u}(x,t) = u(x,t) = \phi(f(x)) = \phi(a\bar{f}(x) + \hat{f}(x))$$

erhalten.

(ii) $\phi$ bildet ganz $F$ in $U$ ab, denn nach Eigenschaft (2) sind alle aus $F$ resultierenden Bewegungen $C^\infty$.

(iii) Der Graph von $\phi$ ist abgeschlossen. Das heißt, falls die zu einer gegen $f$ konvergierenden Folge $f_n$ in $F$ gehörende Folge von Bewegungen $u_n$ in $U$ gegen $u \in U$ konvergiert, so ist $u$ die zu $f$ gehörende Bewegung. Dies ist der Fall, denn wenn ein solcher Grenzwert existiert, so muss er die vorgeschriebenen Anfangsdaten haben und ist nach Eigenschaft (1) eindeutig.

Wir können nun den Satz vom abgeschlossenem Graphen anwenden, der besagt, dass eine Abbildung mit Eigenschaften (i)-(iii) stetig ist. □

***Korollar 2.5***
*Es existieren Konstanten $M$ und $m$, sodass für alle Bewegungen $u$, deren Anfangsdaten $f$ kompakten Träger in $K$ besitzen,*

$$|u(x,t)| \leq M\|f\|_m$$

*für alle $x$ und $|t| \leq 1$ gilt, wobei $\|f\|_m$ dem Maximum von $f$ und dessen partiellen Ableitungen bis zur Ordnung $m$ entspricht.*

*Beweis*
Angenommen, eine solche Konstante $M$ existiert nicht, so gibt es Bewegungen $u$ zu Anfangsdaten $f$ mit kompaktem Träger in $K$ und Punkte $(x,t)$, sodass

$$|u(x,t)| > \epsilon \|f\|_m$$

für alle $\epsilon > 0$ gilt. Das heißt, es existieren Folgen von Anfangsdaten $f_k$ mit $\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_m = 0$, für deren Lösungen $|u_k(x,t)| > 0$ für gewisse Punkte $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (-1,1)$ gilt. Dies stellt einen Widerspruch zu Satz 2.4 dar, da dieser besagt, dass wenn $f_k$ und deren Ableitungen gegen $f$ und die entsprechenden Ableitungen von $f$ konvergieren, so müssen $u_k$ und deren Ableitungen gegen $u$ beziehungsweise den entsprechenden Ableitungen von $u$ konvergieren.

□

Sei nun $K$ der Hyperwürfel im $\mathbb{R}^k$ mit $|x_j| \leq 1$ für $j = 1, \ldots, k$. Dann ist der Träger von $u(x, \pm 1)$ in $|x_j| \leq 1 + c$ enthalten, da sich Bewegungen höchstens mit Geschwindigkeit $c$ ausbreiten. Wir erhalten

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(\xi, \pm 1)| &= \left| \int_{(-1-c,1+c)^k} u(x,\pm 1) e^{-ix\xi} \, dx \right| \leq \int_{(-1-c,1+c)^k} \left| u(x,\pm 1) e^{-ix\xi} \right| \, dx \\ &\leq \int_{(-1-c,1+c)^k} |u(x,\pm 1)| \, dx \leq (2+2c)^k |u(\cdot, \pm 1)|_{\max}. \end{aligned}$$

Wir untersuchen nun die Lösung $u(x,t)$ zu den auf $K$ beschränkten Anfangsdaten $f(x)$, gegeben durch

$$f(x) = h \prod_{j=1}^{k} p(x_j)$$

mit

$$p(x_j) = \begin{cases} \left(1 + x_j\right) \left(1 - x_j^2\right)^{m+1} & \text{für } |x_j| \leq 1, \\ 0 & \text{für } |x_j| > 1, \end{cases}$$

$m \in \mathbb{N}_0$ und einem beliebigen Einheitsvektor $h$. $f$ ist $m$-mal stetig differenzierbar, weshalb $f$ und alle Ableitungen bis zum Grad $m$ als stetige Funktionen auf einem Kompaktum beschränkt sind. Mit Korollar 2.5 existiert somit eine Konstante $\tilde{c}$ mit

$$|\tilde{u}(\xi, \pm 1)| \leq (2+2c)^k |u(\cdot, \pm 1)|_{\max} \leq \tilde{c}. \tag{2.1.4}$$

Nach Gleichung A.0.5 ist für $|\xi| \to \infty$ die Fouriertransformation von $f$ durch

$$\tilde{f}(\xi) = h \left((2i)^{m+2}(m+1)!\right)^k e^{-i\sum_{j=1}^k \xi_j} \prod_{j=1}^{k} \xi_j^{-m-2}$$

gegeben. Mit Gleichung 2.1.3 und Ungleichung 2.1.4 folgt somit

$$\left| e^{\pm G(i\xi)} h \left((2i)^{m+2}(m+1)!\right)^k e^{-i\sum_{j=1}^k \xi_j} \prod_{j=1}^{k} \xi_j^{-m-2} \right| = \left| e^{\pm G(i\xi)} \tilde{f}(\xi) \right| = |\tilde{u}(\xi, \pm 1)| \leq \tilde{c}.$$

Angenommen, $h$ ist parallel zu einem beliebigen Eigenvektor $v(i\xi)$ von $G(i\xi)$ zum Eigenwert $\lambda(i\xi)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{\pm \operatorname{Re}\lambda(i\xi)} \prod_{j=1}^{k} \left|\xi_j^{-m-2}\right| &= \left| e^{\pm\lambda(i\xi)} h \prod_{j=1}^{k} \xi_j^{-m-2} \right| = \left| e^{\pm G(i\xi)} h \prod_{j=1}^{k} \xi_j^{-m-2} \right| \\ &= \left| e^{\pm G(i\xi)} h e^{-i\sum_{j=1}^{k}\xi_j} \prod_{j=1}^{k} \xi_j^{-m-2} \right| \le \frac{\tilde{c}}{(2^{m+2}(m+1)!)^k}, \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$|\operatorname{Re}\lambda(i\xi)| \le \operatorname{const}\log\left(\prod_{j=1}^{k} \left|\xi_j^{m+2}\right|\right) \le \operatorname{const}\log|\xi| \tag{2.1.5}$$

für $\xi \in \mathbb{R}^k$ und $|\xi| \to \infty$. Da die Eigenwerte nur von $G$ und $v$, nicht jedoch von der Wahl der Anfangsdaten abhängen und $v$ einen beliebigen Eigenvektor von $G$ darstellt, gilt dies für alle Eigenwerte $\lambda$. $G(i\xi)$ ist ein Polynom in $\xi$, somit ist es für beschränkte $\xi$ ebenfalls beschränkt. Die Eigenwerte $\lambda$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P$

$$P(\tau, \xi) = \det\left[\tau\mathbb{1} - G(\xi)\right].$$

Für beschränkte $\xi$ sind diese dadurch auch beschränkt. Gleichung 2.1.5 lässt sich somit auf beliebige reelle $\xi$ erweitern. Es gilt

$$|\operatorname{Re}\lambda(i\xi)| \le \operatorname{const}\log(2 + |\xi|) \tag{2.1.6}$$

für $\xi \in \mathbb{R}^k$.

***Satz 2.6***
*Das charakteristische Polynom einer Differentialgleichung, die durch eine sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitende, translationsinvariante Bewegung gelöst wird, hat folgende Eigenschaften:*

*(i) Der Grad in $\tau$ und $\xi$ eines jeden Summanden entspricht höchstens dem Gesamtgrad in $\tau$.*

*(ii) Für die Nullstellen $\tau = \lambda(\xi)$ und reelle $\xi$ gilt*

$$|\operatorname{Re}\lambda(i\xi)| \le \operatorname{const}\log(2 + |\xi|).$$

*Beweisskizze*

*(i)* Nach Peter Lax [5, Seite 10] sind die Eigenwerte $\lambda(i\xi)$ von $G(i\xi)$ durch

$$|\lambda(i\xi)| \le \operatorname{const}\ (1 + |\xi|) \tag{2.1.7}$$

beschränkt. Sie wachsen also höchstens linear in $\xi$. Das charakteristische Polynom von $G(i\xi)$ lässt sich als

$$P(\tau, \lambda(\xi)) = \prod_{\nu=0}^{n} (\tau - \lambda_\nu(\xi))$$

oder als

$$P(\tau, \xi) = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu}(\xi)\tau^{\nu}$$

schreiben. Mit Ungleichung 2.1.7 ist $a_{n-\nu}(\xi)$ ein Polynom, dessen Grad höchstens $n - \nu$ entspricht.

*(ii)* Die Behauptung folgt aus Ungleichung 2.1.6.

□

Mit folgendem Lemma können wir die Eigenwerte von $G(i\xi)$ weiter abschätzen.

***Lemma 2.7***[a]
*Sei $f(\omega, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ ein komplexes Polynom, sodass $f(\omega, s_1, \ldots, s_n)$ für reelle $s_1, \ldots, s_n$ positiven, von $s$ unabhängigen Grad in $\omega$ besitzt. Sei außerdem*

$$M(s) = \max_{j, |s_k| \leq s} \operatorname{Re} \mu_j(s_1, \ldots, s_n),$$

*wobei $\mu_i$ die Nullstellen von $f(\omega, s)$ in $\omega$ darstellen, so gilt für große $s$ entweder $M(s) = 0$ oder*

$$M(s) = as^b(1 + o(1))$$

*mit $0 \neq a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{Q}$.*

Sei $P'(\tau, \xi) = P(\tau, i\xi)$, was nach Satz 2.6(i) von $\xi$ unabhängigen Grad in $\tau$ besitzt. Wir können das Lemma also anwenden und erhalten für die Nullstellen $\lambda'(\xi)$ von $P'(\tau, \xi)$ entweder $\operatorname{Re} \lambda'(\xi) = 0$ oder

$$\max_{j, |\xi_k| \leq s} \operatorname{Re} \lambda'_j(\xi_1, \ldots, \xi_n) = as^b(1 + o(1))$$

für große $s$, beziehungsweise $\xi$. Offensichtlich gilt $\lambda'(\xi) = \lambda(i\xi)$ und somit entweder $\operatorname{Re} \lambda(i\xi) = 0$ oder

$$\max_{j, |\xi_k| \leq s} \operatorname{Re} \lambda_j(i\xi_1, \ldots, i\xi_n) = as^b(1 + o(1)).$$

Mit Satz 2.6(ii) können jedoch keine solchen Konstanten $a$ und $b$ existieren, weshalb wir

$$|\operatorname{Re} \lambda(i\xi)| \leq c \tag{2.1.8}$$

für beliebige $\xi \in \mathbb{R}^k$ erhalten. Trivialerweise folgt aus dieser Ungleichung Satz 2.6(ii), weshalb beide Bedingungen äquivalent sind.

[a] Der Beweis hierzu findet sich in Lars Gårdings Paper [2, S. 11 - 14] wieder.

***Definition 2.8 hyperbolische Differentialgleichungen***

Wir nennen eine partielle Differentialgleichung $u_t - Gu = 0$ *hyperbolisch*, falls

(i) der Grad in $\tau$ und $\xi$ eines jeden Summanden des charakteristischen Polynoms höchstens dem Gesamtgrad in $\tau$ entspricht und

(ii) für die Nullstellen $\lambda$ des charakteristischen Polynoms

$$|\operatorname{Re}\lambda(i\xi)| \leq c$$

für beliebige $\xi \in \mathbb{R}^k$ gilt.

Aus dieser Definition, Satz 2.6(i) und Ungleichung 2.1.8 erhalten wir folgenden Satz.

***Satz 2.9***

*Partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, die durch translationsinvariante Bewegungen mit Eigenschaften (1)-(4) gelöst werden, sind hyperbolisch.*

Bedingung *(ii)* in Definition 2.8 impliziert eine Einschränkung an die Nullstellen $\lambda(i\xi)$ für große $|\xi|$. Dann dominieren die Terme des höchsten Grades $n$ von $P(\tau, \xi)$, was wir als $P_0(\tau, \xi)$ bezeichnen. Das heißt, $P_0$ besteht aus allen Monomen von $P$ mit Grad $n$, ist somit eine $n$-Form und wird *charakteristische Form* genannt.

***Lemma 2.10***

*Die Nullstellen $\sigma$ der charakteristischen Form sind homogene Funktionen ersten Grades in $\xi$.*

*Beweis*

Wir können $P_0(\tau, \xi)$ als Produkt der Nullstellen

$$P_0(\tau, \xi) = \prod_{j=1}^{n} (\tau - \sigma_j(\xi))$$

oder als Polynom

$$P_0(\tau, \xi) = \sum_{|\alpha|+k=n} c_\alpha \xi^\alpha \tau^k$$

mit Multiindex $\alpha$ und Konstanten $c_\alpha$ darstellen. Für $z \in \mathbb{C}$ folgt somit

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n} (z\tau - \sigma_j(z\xi)) &= \sum_{|\alpha|+k=n} c_\alpha (z\xi)^\alpha (z\tau)^k = z^n \sum_{|\alpha|+k=n} c_\alpha \xi^\alpha \tau^k \\ &= z^n \prod_{j=1}^{n} (\tau - \sigma_j(\xi)) = \prod_{j=1}^{n} (z\tau - z\sigma_j(\xi)),\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\sigma_j(z\xi) = z\sigma_j(\xi).$$

□

***Satz 2.11***
*Sei $P(\tau, \xi)$ das charakteristische Polynom einer hyperbolischen Differentialgleichung. So gilt für die Nullstellen $\sigma$ der dazugehörigen charakteristischen Form $P_0(\tau, \xi)$*

$$\sigma(\xi) \in \mathbb{R}$$

*für $\xi \in \mathbb{R}^k$.*

*Beweis*
Aufgrund von Lemma 2.10 ist $\sigma$ eine homogene Funktion ersten Grades und mit Lemma B.1 können wir es durch $\lambda$ abschätzen. Es gilt

$$|\operatorname{Im}\sigma(\xi)| = |\operatorname{Re} i\sigma(\xi)| = |\operatorname{Re}\sigma(i\xi)| \leq |\operatorname{Re}\lambda(i\xi)| + o(\xi).$$

Nach Definition 2.8 ist $\lambda$ durch

$$|\operatorname{Re}\lambda(i\xi)| \leq c$$

beschränkt, weshalb für $\sigma$

$$|\operatorname{Im}\sigma(\xi)| \leq o(\xi)$$

und dadurch

$$0 = \lim_{|\xi|\to\infty} \left|\frac{\operatorname{Im}\sigma(\xi)}{\xi}\right| = \lim_{|\xi|\to\infty} \left|\frac{|\xi|\operatorname{Im}\sigma(\xi/|\xi|)}{\xi}\right| = \lim_{|\xi|\to\infty} |\operatorname{Im}\sigma(\xi/|\xi|)| = |\operatorname{Im}\sigma(\xi/|\xi|)|$$

folgt. Für alle reellen Einheitsvektoren $\nu$ ist also $\sigma(\nu)$ reell. Mittels erneutem Ausnutzen der Homogenität erhalten wir

$$\sigma(\xi) = |\xi|\sigma(\xi/|\xi|) \in \mathbb{R}.$$

□

Wir untersuchen nun eine allgemeinere Definition von Hyperbolizität.

***Definition 2.12***
Sei $P_0(\zeta)$ eine $n$-Form in $k+1$ Variablen $\zeta_0, \dots, \zeta_k$. $P_0$ ist *hyperbolisch*, falls ein Vektor $\nu \in \mathbb{R}^{k+1}$ existiert, sodass $P_0(s\nu + \zeta)$ für alle $\zeta \in \mathbb{R}^{k+1}$, die nicht parallel zu $\nu$ sind, nur reelle Nullstellen in $s$ besitzt. $P_0$ ist *strikt hyperbolisch*, falls die Nullstellen zusätzlich paarweise verschieden sind. Existiert ein solcher Vektor $\nu$ so nennen wir diesen *(strikt) hyperbolisch.*

Wir wollen nun zeigen, dass hyperbolische Differentialgleichungen eine hyperbolische Form bilden. Sei $\nu = (1, 0, \dots, 0)$, so ist $s\nu + \zeta = (s + \zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_k)$. Wir setzen $\tau = s + \zeta_0$. Da die Bedingung für reelle $\zeta$ gelten muss ist $\tau$ genau dann reell, wenn $s$ reell ist. Mit Definition 2.8 und Satz 2.11 gilt, dass $\tau$ reell sein muss, wenn $P_0(s\nu+\zeta) = P_0(\tau, \zeta_1, \dots, \zeta_k)$ verschwindet. Somit ist auch $s$ reell und $\nu$ ist ein hyperbolischer Vektor.

Umgekehrt können wir zu jeder hyperbolischen Form $P_0(\tau,\xi)$ eine Differentialgleichung konstruieren, die Definition 2.8 genügt. Wir schreiben $P_0$ als

$$P_0(\tau,\xi) = \sum_{j=1}^{n} a_j(\xi)\tau^{n-j},$$

wobei $a_j = a_j(\xi)$ Formen des Grades $j$ sind. Außerdem definieren wir

$$G(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{1} & \\ 0 & & & \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix},$$

beziehungsweise

$$M_j(\tau,\xi) = \begin{pmatrix} \tau & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tau & -1 \\ a_j & \cdots & \cdots & a_2 & \tau + a_1 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt für das charakteristische Polynom von $\partial_t - G$

$$P(\tau,\xi) = \det(\tau\mathbb{1} - G(\xi)) = \det M_n(\tau,\xi),$$

was wir zeilenweise entwickeln können. Wir erhalten

$$\det M_j(\tau,\xi) = a_j(\xi) + \tau \det M_{j-1}(\tau,\xi)$$

und

$$\det M_1(\tau,\xi) = \tau + a_1,$$

weshalb induktiv

$$P(\tau,\xi) = \sum_{j=1} a_j(\xi)\tau^{n-j} = P_0(\tau,\xi)$$

folgt. Da $P_0(\tau,\xi)$ eine Form darstellt und für reelle $\xi$ nur reelle Nullstellen besitzt, genügt $\partial_t - G$ der Definition einer hyperbolischen Differentialgleichung.
Wir schreiben Gleichung 2.1.1 komponentenweise

$$\partial_t u_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(\partial_x)u_j,$$

wobei $g_{ij}(\partial_x)$ den Einträgen von $G(\partial_x)$ entspricht und weisen $u_i$ einen Ableitungsgrad $d_i$ zu. Angenommen, der örtliche Ableitungsgrad übersteigt den zeitlichen Ableitungsgrad nicht, so gilt

$$\deg g_{ij} + d_j \leq 1 + d_i. \tag{2.1.9}$$

Außerdem nennen wir den Teil von $G$, für den Gleichheit in Ungleichung 2.1.9 gilt, *Hauptteil* $G_0$. Seien $G = G_0 + \hat{G}$, $\mathring{g}_{ij}$ die Einträge von $G_0$ und $\hat{g}_{ij}$ die von $\hat{G}$, so erhalten wir nach der Leibniz-Formel für das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}
P(\tau,\xi) &= \det(\tau\mathbb{1} - G(\xi)) \\
&= \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{j=1}^{n} (\delta_{j,\pi(j)}\tau - \mathring{g}_{j,\pi(j)}(\xi) - \hat{g}_{j,\pi(j)}(\xi)) \\
&= \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{j=1}^{n} (\delta_{j,\pi(j)}\tau - \mathring{g}_{j,\pi(j)}(\xi)) \\
&\quad - \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sign}(\pi) \sum_{i=1}^{n} \hat{g}_{i,\pi(i)}(\xi) \prod_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} (\delta_{j,\pi(j)}\tau - \mathring{g}_{j,\pi(j)}(\xi) - \hat{g}_{j,\pi(j)}(\xi)).
\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\deg_\tau P(\tau,\xi) = n$,

$$\begin{aligned}
&\deg_\xi \left( \hat{g}_{i,\pi(i)}(\xi) \prod_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} (\delta_{j,\pi(j)}\tau - \mathring{g}_{j,\pi(j)}(\xi) - \hat{g}_{j,\pi(j)}(\xi)) \right) \\
&\qquad \leq d_i - d_{\pi(i)} + \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} (d_j - d_{\pi(j)} + 1) = n - 1 + \sum_{j=1}^{n} (d_j - d_{\pi(j)}) = n-1
\end{aligned}$$

und

$$\deg_\xi \left( \prod_{j=1}^{n} (\delta_{j,\pi(j)}\tau - \mathring{g}_{j,\pi(j)}(\xi)) \right) = \sum_{j=1}^{n} (d_j - d_{\pi(j)} + 1) = n.$$

Die charakteristische Form einer solchen Differentialgleichung ist also durch

$$P_0(\tau,\xi) = \det(\tau\mathbb{1} - G_0(\xi))$$

gegeben. Außerdem zeigen diese Rechnungen, dass Definition 2.8(i) erfüllt ist. Demnach erhalten wir eine weiter Definition der Hyperbolizität.

***Definition 2.13***

Der Operator $\partial_t - G$ heißt *hyperbolisch*, falls

(i) die Einträge $g_{ij}$ von $G$

$$\deg g_{ij} \leq d_i - d_j + 1$$

und

(ii) die Eigenwerte $\lambda(i\xi)$ von $G(i\xi)$

$$|\operatorname{Re}\lambda(i\xi)| \leq c$$

für beliebige reelle $\xi$ erfüllen.

Er heißt *strikt hyperbolisch*, falls $G_0(\xi)$ für reelle $\xi \neq 0$ nur reelle, paarweise verschiedene Eigenwerte besitzt.

Ein solcher hyperbolischer Differentialoperator erfüllt Definition 2.8 und die dazugehörige charakteristische Form genügt mit Satz 2.11 auch Definition 2.12. Analog zu vorher ist $\nu = (1, 0, \ldots, 0)$ für einen strikt hyperbolischen Differentialoperator ein strikt hyperbolischer Vektor. Es verbleibt zu zeigen, dass die Definition auch in sich Sinn ergibt, ein strikt hyperbolischer Differentialoperator also auch (schwach) hyperbolisch ist, was im nachfolgenden Satz geschehen soll.

***Satz 2.14***
*Sei $\partial_t - G$ ein strikt hyperbolischer Differentialoperator, so existiert eine Konstante $c$, sodass für alle Eigenwerte $\lambda$ von $G$ und reelle $\xi$*

$$|\operatorname{Re} \lambda(i\xi)| \leq c$$

*gilt.*

*Beweis*
Die Beweisidee hierzu stammt aus Jens Wirths Vorlesungsskript [8, S. 16]. Es gilt $P(\tau, i\xi) - P_0(\tau, i\xi) = \mathcal{O}\left((|\tau| + |\xi|)^{n-1}\right)$. Somit folgt für ein beliebiges, festes $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^k$ und $\omega > 0$

$$\left|\omega^{-n} P(\omega\tau, i\omega\xi) - P_0(\tau, i\xi)\right| = \omega^{-n} \left|P(\omega\tau, i\omega\xi) - P_0(\omega\tau, i\omega\xi)\right| \leq c\omega^{-1}(|\tau| + |\xi|)^{n-1}. \tag{2.1.10}$$

Da $P_0(\tau, i\xi)$ paarweise verschiedene Nullstellen $\sigma_j(i\xi)$ besitzt, existieren für $j \neq l$ Konstanten $c_{jl} \neq 0$ mit

$$\sigma_j(i\xi) - \sigma_l(i\xi) = c_{jl}.$$

Sei $\sigma_l(i\xi)$ eine beliebige dieser Nullstellen, $r > 0$ beliebig, aber fest und

$$\tau \in \partial B(\sigma_l(i\omega\xi), r\omega^{-1}),$$

so können wir $\tau$ durch

$$\sigma(i\xi) + r\omega^{-1}e^{i\phi},$$

wobei $\phi \in \mathbb{R}$ ist, darstellen und erhalten

$$\tau - \sigma_j(i\xi) = \tau - \sigma_j(i\xi) = \begin{cases} c_{jl} + r\omega^{-1}e^{i\phi} & \text{für } j \neq l, \\ r\omega^{-1}e^{i\phi} & \text{für } j = l, \end{cases}$$

weshalb für die charakteristische Form

$$\omega^{-n} P_0(\omega\tau, i\omega\xi) = \prod_{j=1}^{n} (\tau - \sigma_j(i\xi)) = r\omega^{-1}e^{i\phi} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{n} \left(c_{jl} + r\omega^{-1}e^{i\phi}\right)$$

folgt. Da $c_{jl}$ und $r$ konstant sind, existiert eine weitere Konstante $c'$ und ein $\omega_0 > 0$, sodass für alle $\omega > \omega_0$

$$\left| \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{n} \left( c_{jl} + r\omega^{-1} e^{i\phi} \right) \right| \geq c'$$

gilt, weshalb wir

$$\left| \omega^{-n} P_0(\omega\tau, i\omega\xi) \right| \geq \omega^{-1} r c'$$

erhalten. Aus Ungleichung 2.1.10 und da $\xi$ konstant ist, existiert eine Konstante $\tilde{c}$, sodass für alle festen $r$ ein $\omega_1$ existiert, sodass für alle $\omega > \omega_1$

$$\begin{aligned} \left| \omega^{-n} P(\omega\tau, i\omega\xi) - P_0(\tau, i\xi) \right| &\leq c\omega^{-1} (|\tau| + |\xi|)^{n-1} \leq c\omega^{-1} \left( \left| \sigma(i\xi) + r\omega^{-1} e^{i\phi} \right| + |\xi| \right)^{n-1} \\ &\leq c\omega^{-1} \left( \bar{c} + \left| r\omega^{-1} e^{i\phi} \right| \right)^{n-1} = c\omega^{-1} \left( \bar{c} + r\omega^{-1} \right)^{n-1} \leq \tilde{c}\omega^{-1} \end{aligned}$$

folgt. Da die einzig weitere Voraussetzung an $r > 0$ war, dass es konstant sein muss, können wir $r = \tilde{c}/c' + 1$ setzen, weshalb für große $\omega$ und $\tau \in \partial B(\sigma(i\xi), r/\omega)$

$$\left| \omega^{-n} P(\omega\tau, i\omega\xi) - P_0(\tau, i\xi) \right| < \left| \omega^{-n} P_0(\omega\tau, i\omega\xi) \right|,$$

beziehungsweise

$$|P(\omega\tau, i\omega\xi) - P_0(\omega\tau, i\omega\xi)| < |P_0(\omega\tau, i\omega\xi)|$$

gilt. $P - P_0$ und $P_0$ sind Polynome und somit holomorph, weshalb der Satz von Rouché zeigt, dass für $\tau \in B(\sigma(i\xi), r\omega^{-1})$ $P(\omega\tau, i\omega\xi)$ und $P_0(\omega\tau, i\omega\xi)$ gleich viele Nullstellen in $\tau$ besitzen. Es existiert also ein $\bar{\lambda}(i\xi) \in B(\sigma(i\xi), r\omega^{-1})$ mit $P(\omega\bar{\lambda}(i\xi), i\omega\xi) = 0$. Somit löst $\lambda(i\omega\xi) = \omega\bar{\lambda}(i\xi) \in B(\omega\sigma(i\xi), r)$

$$P(\lambda(i\omega\xi), i\omega\xi) = 0.$$

Nach Voraussetzung ist $\sigma(\xi) \in \mathbb{R}$ und Lemma 2.10 liefert

$$\operatorname{Re} \omega\sigma(i\xi) = \operatorname{Re} i\omega\sigma(\xi) = 0.$$

Für große $\omega$ ist also

$$\operatorname{Re} \lambda(i\omega\xi) \leq r.$$

Da $r$ fest ist und $\lambda(i\omega\xi)$ für beschränkte $\omega$ ebenso beschränkt ist folgt

$$\operatorname{Re} \lambda(i\omega\xi) \leq \text{const.}$$

□

Wir wollen uns von nun an auf Differentialoperatoren beschränken, die Bedingung (i) in Definition 2.13 erfüllen.

## 2.2 Bewegungen hyperbolischer Differentialgleichungen

In Kapitel 2.1 wurde deutlich, dass aus Bewegungen, die Eigenschaften (1)-(4) erfüllen hyperbolische partielle Differentialgleichungen hervorgehen. Nun wollen wir die Umkehrung hiervon untersuchen. Sei dazu $u_t - Gu = 0$ strikt hyperbolisch mit konstanten Koeffizienten. Eigenschaft (3) folgt daher, dass die Gleichung linear ist. Aussagen (1) und (2) sagen aus, dass zu beliebig oft differenzierbaren Anfangsdaten mit kompaktem Träger genau eine beliebig oft differenzierbare Lösung der Differentialgleichung existiert.

Wir wenden erneut die Fouriertransformation an und erhalten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(\xi,t) = G(i\xi)\tilde{u}(\xi,t),$$

welche durch

$$\tilde{u}(\xi,t) = e^{tG(i\xi)}\tilde{u}(\xi,0). \tag{2.2.1}$$

gelöst wird. Da $u_t - Gu = 0$ als strikt hyperbolisch angenommen wurde, erfüllt $G(i\xi)$ Eigenschaft (ii) aus Satz 2.6, weshalb $e^{tG(i\xi)}$ höchstens polynomiell in $\xi$ wächst.[b] Wir wollen von folgendem Lemma Gebrauch machen.

***Lemma 2.15***
*Für $u(\xi,0) \in C^s(\mathbb{R}^k)$ mit kompaktem Träger in $\xi$ existiert eine Konstante $K_s$, sodass*

$$(1+|\xi|)^s\,|\tilde{u}(\xi,0)| \leq 2^s k^{\frac{s}{2}} K_s$$

*gilt.*

*Beweis*
Der Beweis ist Fritz Johns Überlegungen [4, S. 123] nachempfunden. Analog zu Gleichung 2.1.2 erhalten wir

$$(i\xi)^\alpha\,\tilde{u}(\xi,0) = \widetilde{\partial_x^\alpha u}(\xi,0),$$

wobei $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ einen Multiindex mit $|\alpha| \leq s$ darstellt. Mit $\xi_{max} = \max_i |\xi_i|$ gilt

$$|\xi| \leq \sqrt{k}\xi_{max}$$

und deshalb

$$(1+|\xi|)^s = \sum_{l=0}^{s}\binom{s}{l}|\xi|^l \leq k^{\frac{s}{2}}\sum_{l=0}^{s}\binom{s}{l}\xi_{max}^l \leq k^{\frac{s}{2}}\sum_{l=0}^{s}\binom{s}{l}\sum_{|\alpha|\leq s}|\xi^\alpha| = 2^s k^{\frac{s}{2}}\sum_{|\alpha|\leq s}|\xi^\alpha|.$$

Zusammen folgt somit

$$(1+|\xi|)^s\,|\tilde{u}(\xi,0)| \leq 2^s k^{\frac{s}{2}}\sum_{|\alpha|\leq s}|(i\xi)^\alpha\tilde{u}(\xi,0)|$$

[b] Ein expliziter Beweis, wieso $\left\|e^{tG}\right\| \leq \text{const}\; e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda}$ gilt ist im Beweis von Satz 2.19 zu finden.

$$
\begin{aligned}
&= 2^s k^{\frac{s}{2}} \sum_{|\alpha|\le s} \left|\widetilde{\partial_x^\alpha u}(\xi,0)\right| \\
&= 2^s k^{\frac{s}{2}} \sum_{|\alpha|\le s} \left|\int_{\mathbb{R}^k} e^{-ix\xi}\ \partial_x^\alpha u(x,0)\ dx\right| \\
&\le 2^s k^{\frac{s}{2}} \sum_{|\alpha|\le s} \int_{\mathbb{R}^k} |\partial_x^\alpha u(x,0)|\ dx \\
&= 2^s k^{\frac{s}{2}} K_s
\end{aligned}
$$

mit einer Konstante $K_s$, da $u$ und alle vorkommenden Ableitungen stetige Funktionen mit kompaktem Träger darstellen. □

Für $s \ge \deg_\xi(e^{tG(i\xi)}) + 2$ und beliebiges $0 \le t \in \mathbb{R}$ gilt

$$
\left|\int_{\mathbb{R}^k} \tilde{u}(\xi,t)e^{ix\xi}\ d\xi\right| = \int_{\mathbb{R}^k} \left|e^{tG(i\xi)}\tilde{u}(\xi,0)e^{ix\xi}\right| d\xi \le \int_{\mathbb{R}^k} \frac{\text{const}}{(1+|\xi|)^2}\ d\xi < \infty,
$$

weshalb die inverse Fouriertransformation von $\tilde{u}(\xi,t)$ konvergiert. Durch ihre Konstruktion erfüllt sie die Differentialgleichung, hat die vorgeschriebenen Anfangsdaten und ist eindeutig.

Es bleibt noch zu zeigen, dass diese Lösung Eigenschaft (4) erfüllt, also einen kompakten Träger in $x$ besitzt. Sei dazu $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ $m$-fach differenzierbar mit kompaktem Träger $K$ und

$$
s_K(\xi) := \max_{x\in K} x\xi
$$

die Stützfunktion von $K$ für reelle $\xi$. $s_K(\xi)$ ist offensichtlich positiv homogen, das heißt für $\rho \ge 0$ gilt $s_K(\rho\xi) = \rho s_K(\xi)$. Die Fouriertransformation

$$
\tilde{f}(\zeta) = \int_K e^{-ix\zeta} f(x)\ dx
$$

ist für komplexe $\zeta$ wohldefiniert und analytisch in $\mathbb{C}^k$. Wir können $\tilde{f}(\zeta)$ durch

$$
\left|\tilde{f}(\zeta)\right| \le \int_{\mathbb{R}^k} \left|e^{-ix\zeta} f(x)\right|\ dx \le \int_K \left|e^{-ix\zeta} f(x)\right|\ dx \le \max_{x\in K}\left|e^{-ix\zeta}\right| \int_K |f(x)|\ dx \le c e^{s_k(\mathrm{Im}(\zeta))}
$$

abschätzen. Analog folgt durch $m$-fache partielle Integration

$$
\begin{aligned}
\left|\zeta^m \tilde{f}(\zeta)\right| &\le \int_K \left|(-i\zeta)^m f(x)e^{-ix\zeta}\right|\ dx \le \int_K \left|f(x)\partial_x^m e^{-ix\zeta}\right|\ dx \le \int_K \left|e^{-ix\zeta}\partial_x^m f(x)\right|\ dx \\
&\le \sup_{x\in K}\left|e^{-ix\zeta}\right| \int_K |\partial_x^m f(x)|\ dx \le c_m e^{s_k(\mathrm{Im}(\xi))}.
\end{aligned}
$$

Zusammen ergibt das

$$
\left|\tilde{f}(\zeta)\right| \le \frac{\text{const}}{1+|\zeta|^m} e^{s(\eta)}, \tag{2.2.2}
$$

wobei $s = s_K$ und $\eta = \mathrm{Im}\,\zeta$ entspricht. Die Umkehrung hiervon entspricht dem *Satz von Plancherel und Polya.*

***Satz 2.16 Satz von Plancherel und Polya***

*Sei $\tilde{f}(\zeta)$ eine analytische Funktion die Ungleichung 2.2.2 mit einer positiv homogenen Funktion $s(\eta)$ erfüllt. Dann verschwindet die inverse Fouriertransformation $f(x)$ für alle Punkte, die nicht in der Menge $A = \{y \mid y\eta \leq s(\eta), \eta \in \mathbb{R}^k\}$ enthalten sind.*

*Beweisskizze*

Sei $x \notin A$, dann existieren reelle $w$ mit $xw > s(w)$. Nach dem Integralsatz von Cauchy ändert sich beim Wechsel des Integrationspfads der Wert des Integrals nicht. Es gilt also

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^k} \tilde{f}(\xi) e^{ix\xi}\ d\xi = \int_{\mathbb{R}^k} \tilde{f}(\xi + ipw) e^{ix(\xi+ipw)}\ d\xi$$

für beliebige $p \in \mathbb{R}$. Mit Gleichung 2.2.2 und $xw > s(w)$ können wir dies durch

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^k} \left| \tilde{f}(\xi + ipw) e^{ix(\xi+ipw)} \right|\ d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^k} \left| \frac{\text{const}}{1 + |\xi + ipw|^m} e^{s(pw)} e^{ix(\xi+ipw)} \right|\ d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^k} \left| \frac{\text{const}}{1 + |\xi + ipw|^m} e^{xpw} e^{ix(\xi+ipw)} \right|\ d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^k} \left| \frac{\text{const}}{1 + |\xi + ipw|^m} e^{ix\xi} \right|\ d\xi \xrightarrow{p\to\infty} 0 \end{aligned}$$

abschätzen. □

Um dies auf unser Problem anwenden zu können, muss $e^G$ abgeschätzt werden, wofür wir folgende Lemmata benötigen.

***Lemma 2.17 Phragmén-Lindelöf-Prinzip***[c]

*Sei $h(z)$ eine in der oberen Halbebene analytische Funktion, die*

| | | |
|---|---|---|
| *(i)* | $\lvert h(z)\rvert \leq m$ | *für* $z \in \mathbb{R}$, |
| *(ii)* | $\lvert h(z)\rvert \leq m e^{s \operatorname{Im} z}$ | *für* $z \in i\mathbb{R}, \operatorname{Im} z \to \infty$ *und* |
| *(iii)* | $\lvert h(z)\rvert \leq M e^{S\lvert z\rvert}$ | *für* $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z \geq 0$ |

*erfüllt, so gilt*

$$|h(z)| \leq m e^{s \operatorname{Im} z}$$

*in der gesamten oberen Halbebene.*

***Lemma 2.18***

*Sei $z \in \mathbb{C}$ und $\xi, \eta \in \mathbb{R}^k$, so besitzt $e^{G(i\xi + iz\eta)}$ für $|z| \to \infty$ paarweise verschiedene Eigenwerte.*

[c] Für einen Beweis dieser Variante des Prinzips von Phragmén-Lindelöf sei auf Mohammed Amer Qazi und Qazi Ibadur Rahman [7, S. 153] verwiesen.

*Beweis*
Angenommen, es existieren Eigenwerte $\lambda_p$ und $\lambda_q$ von $G$ mit $\lambda_p(i\xi + iz\eta) = \lambda_q(i\xi + iz\eta)$ für $|z| \to \infty$, so existieren nach Lemma B.1 Eigenwerte $\sigma_p$ und $\sigma_q$ von $G_0$ mit

$$\sigma_p(iz\eta) = \lambda_p(i\xi + iz\eta) + o(z) = \lambda_q(i\xi + iz\eta) + o(z) = \sigma_q(iz\eta) + o(z),$$

weshalb nach Lemma 2.10

$$0 = \lim_{|z|\to\infty} \left| \frac{\sigma_p(iz\eta) - \sigma_q(iz\eta)}{z} \right| = \lim_{|z|\to\infty} \left| \frac{iz\sigma_p(\eta) - iz\sigma_q(\eta)}{z} \right| = |\sigma_p(\eta) - \sigma_q(\eta)|$$

gilt. Dies stellt einen Widerspruch dazu dar, dass $G_0(\eta)$ für reelle $\eta$ nur paarweise verschiedene Eigenwerte besitzt und da $e^\lambda$ einen Eigenwert zu $e^G$ darstellt, folgt die Behauptung. $\square$

Wir können nun $e^G$ abschätzen.

***Satz 2.19***
*Es existiert eine Konstante $m$, sodass für alle $\zeta \in \mathbb{C}^k$*

$$\left\| e^{G(i\zeta)} \right\| \leq m e^{\sigma_{\max}(-\operatorname{Im}\zeta) + o(\operatorname{Im}\zeta)}$$

*gilt.*

*Beweisskizze*
Wir wollen das Prinzip von Phragmén-Lindelöf anwenden und definieren hierzu

$$h(z) = e^{G(i\xi + iz\eta)}$$

mit beliebigen Vektoren $\xi, \eta \in \mathbb{R}^k$. Als Exponentialfunktion von Polynomen ist $h(z)$ holomorph und für beschränkte $z$ ebenfalls beschränkt. Wir müssen uns also nur um den Fall $|z| \to \infty$ kümmern. Für reelle oder rein imaginäre $z$ besitzt $e^{G(i\xi+iz\eta)}$ nach Lemma 2.18 paarweise verschiedene Eigenwerte $e^{\lambda_j(i\xi+iz\eta)}$, weshalb die normierten Eigenvektoren $v_j$ den gesamten Raum aufspannen und wir einen beliebigen Vektor $x$ als Linearkombination $x = \sum_{j=1}^n c_j v_j$ darstellen können. Somit gilt

$$\begin{aligned}\left\| e^{G(i\xi+iz\eta)} \right\| &= \max_{|x|=1} \left| e^{G(i\xi+iz\eta)} x \right| \leq \max_{\left|\sum c_j v_j\right|=1} \left| \sum_{j=1}^n c_j e^{G(i\xi+iz\eta)} v_j \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n c_{\max} \left| e^{\lambda_j(i\xi+iz\eta)} v_j \right| \leq \sum_{j=1}^n c_{\max} \left| e^{\lambda_j(i\xi+iz\eta)} \right| \leq n c_{\max} e^{\max_j |\operatorname{Re}\lambda_j(i\xi+iz\eta)|}\end{aligned}$$

mit $c_{\max} = \max_j |c_j|$. Mit Satz 2.14 erfüllt unser strikt hyperbolischer Operator auch Bedingung (ii) in Definition 2.13. Für reelle $z$ ist $\xi + z\eta$ ebenfalls reell und wir erhalten

$$\left\| e^{G(i\xi+iz\eta)} \right\| \leq n c_{\max} e^{\max_j |\operatorname{Re}\lambda_j(i\xi+iz\eta)|} \leq n c_{\max} e^c \leq m.$$

Für imaginäre $z$ folgt nach Lemma B.1

$$\left\| e^{G(i\xi+iz\eta)} \right\| \leq n c_{\max} e^{\max_j |\operatorname{Re}\lambda_j(i\xi+iz\eta)|} \leq n c_{\max} e^{\sigma_{\max}(iz\eta)+o(iz\eta)} \leq m e^{\sigma_{\max}(-\operatorname{Im} z\eta)+o(\operatorname{Im} z\eta)}.$$

Nach Definition 2.13(i) gilt für die Einträge von $G$

$$\deg_\psi g_{ij}(i\psi) \leq d_i - d_j + 1$$

für beliebige $\psi \in \mathbb{C}^k$. Wir definieren $\widetilde{G}$ durch

$$\widetilde{G}(i\psi) = D^{-1}(\psi) G(i\psi) D(\psi) \qquad \text{mit } D(\psi) = \begin{pmatrix} |\psi|^{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & |\psi|^{d_n} \end{pmatrix}.$$

Für deren Einträge folgt somit

$$\deg_\psi \tilde{g}_{ij}(i\psi) = 1,$$

weshalb Konstanten $p$ und $q$ existieren, sodass

$$\left\| \widetilde{G}(i\psi) \right\| \leq p|\psi| + q$$

und deshalb

$$\begin{aligned}
\left\| e^{G(i\psi)} \right\| &= \left\| e^{D(\psi)\widetilde{G}(i\psi)D^{-1}(\psi)} \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(D(\psi)\widetilde{G}(i\psi)D^{-1}(\psi)\right)^k}{k!} \right\| \\
&= \left\| D(\psi) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\widetilde{G}(i\psi)\right)^k}{k!} D^{-1}(\psi) \right\| = \left\| D(\psi) e^{\widetilde{G}(i\psi)} D^{-1}(\psi) \right\| \\
&\leq \left\| D(\psi) \right\| \left\| D^{-1}(\psi) \right\| \left\| e^{\widetilde{G}(i\psi)} \right\| \leq \left\| D(\psi) \right\| \left\| D^{-1}(\psi) \right\| e^{\left\| \widetilde{G}(i\psi) \right\|}
\end{aligned}$$

gilt. Sei $d = \max_{j,k} |d_j - d_k|$ so erhalten wir

$$\left\| e^{G(i\psi)} \right\| \leq |\psi|^d e^{p|\psi|+q} \leq M e^{S|\psi|}$$

mit Konstanten $M$ und $S$. Insgesamt erfüllt $e^{G(i\xi+iz\eta)}$ also die Voraussetzungen des Prinzips von Phragmén-Lindelöf 2.17 und $e^G$ ist durch

$$\left\| e^{G(i\xi+iz\eta)} \right\| \leq m e^{\sigma_{\max}(-\operatorname{Im} z\eta) + o(\operatorname{Im} z\eta)}$$

beschränkt. Wir setzen $z = i$, weshalb $\xi + z\eta$ einen beliebigen Vektor in $\mathbb{C}^k$ darstellt und erhalten die Behauptung. $\square$

Angenommen, $u(x,0)$ besitzt einen kompakten Träger innerhalb der Kugel $|x| \leq R$, dann existieren nach dem Satz von Paley-Wiener für jedes $l \in \mathbb{N}$ Konstanten $c_l$, sodass

$$|\tilde{u}(\zeta,0)| \leq \frac{c_l}{(1+|\zeta|^l)} e^{R|\eta|}$$

gilt. Zusammen mit Satz 2.19 ergibt das

$$|\tilde{u}(\zeta,t)| = \left| e^{tG(i\zeta)} \tilde{u}(\zeta,0) \right| \leq \left\| e^{tG(i\zeta)} \right\| |\tilde{u}(\zeta,0)| \leq \frac{mc_l}{1+|\zeta|^l} e^{t\sigma_{\max}(-\eta) + to(\eta) + R|\eta|}$$

mit $\eta = \operatorname{Im}\zeta$, beziehungsweise für jedes $\epsilon > 0$ folgt

$$|\tilde{u}(\zeta,t)| \leq \frac{mc_l}{1+|\zeta|^l} e^{t\sigma_{\max}(-\eta)+t\epsilon|\eta|+R|\eta|},$$

vorausgesetzt $\eta$ ist groß genug. Man findet demnach für jedes $l$ eine Konstante $c_l$, sodass $\tilde{u}(\zeta,t)$ den Satz von Plancherel und Polya 2.16 erfüllt und $u(x,t)$ für alle Punkte $x$, die

$$x\eta \leq t\sigma_{\max}(-\eta) + (t\epsilon + R)|\eta|$$

für beliebige $\eta$ nicht erfüllen, verschwindet. $x$ verändert sich nicht wenn wir den Grenzwert $|\eta| \to \infty$ bilden, weshalb $u(x,t)$ nur für die Punkte nicht verschwindet, für die

$$x\eta \leq t\sigma_{\max}(-\eta) + R|\eta| \tag{2.2.3}$$

für alle $\eta$ gilt. Der Einflussbereich des Ursprungs liegt somit innerhalb der Menge

$$M = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{k+1} \middle| x\eta \leq t\sigma_{\max}(-\eta)\right\}$$

und folgender Satz ist bewiesen.

***Satz 2.20***
*Der Einflussbereich breitet sich mit endlicher Geschwindigkeit aus.*

Wir haben somit gezeigt, dass Lösungen strikt hyperbolischer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten tatsächlich Bewegungen mit Eigenschaften (1) - (4) aus Kapitel 2.1 widerspiegeln.

Die Stützfunktion des Einflussbereichs des Ursprungs kann auch nach unten abgeschätzt werden. Seien dazu die Anfangsdaten für ein beliebiges $\epsilon > 0$ auf dem kompakten Hyperwürfel $|x_j| \leq \epsilon, j = 1, \ldots, k$ durch

$$f(x) = v \prod_{j=1}^{k} p(x_j)$$

mit einem beliebigen normierten Eigenvektor $v$ von $G$,

$$p(x_j) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{x_j}{\epsilon}\right)\left(1 - \left(\dfrac{x_j}{\epsilon}\right)^2\right)^{m+1} & \text{für } |x_j| \leq \epsilon, \\ 0 & \text{für } |x_j| > \epsilon \end{cases}$$

und $m \in \mathbb{N}_0$ gegeben. So existiert eine Konstante $c$, sodass für große $|\eta|$

$$\left|\tilde{f}(i\eta)\right| \geq ce^{-\epsilon|\eta|}$$

gilt, denn analog zu Gleichung A.0.5 folgt für die Fouriertransformation von $f$ für $|\eta| \to \infty$

$$\left|\tilde{f}(i\eta)\right| = \left|\left((2i)^{m+2}(m+1)!\right)^k e^{\sum_{j=1}^k \epsilon\eta_j} \prod_{j=1}^{k} \epsilon^{-m-1}(i\eta_j)^{-m-2}\right| \geq ce^{-\epsilon|\eta|}.$$

Insgesamt kann $\tilde{u}$ nach Lemma B.1 durch

$$\begin{aligned}|\tilde{u}(i\eta,t)| = \left|e^{tG(-\eta)}\tilde{u}(i\eta,0)\right| = \left|e^{tG(-\eta)}\tilde{f}(i\eta)\right| = \left|e^{tG(-\eta)}v\prod_{j=1}^{k}\tilde{p}(i\eta_j)\right| = \\ \left|e^{t\lambda(-\eta)}v\prod_{j=1}^{k}\tilde{p}(i\eta_j)\right| = \left|e^{t\lambda(-\eta)}v\prod_{j=1}^{k}\tilde{p}(i\eta_j)\right| = \left|e^{t\lambda(-\eta)}\tilde{f}(i\eta)\right| \\ \geq e^{t\sigma_{\max}(-\eta)-t\epsilon|\eta|}\left|\tilde{f}(i\eta)\right| \geq e^{t\sigma_{\max}(-\eta)-(t+1)\epsilon|\eta|}\end{aligned}$$

abschätzt werden. Außerdem kann $m$ so groß gewählt werden, dass die Lösung $u$ stetig ist und somit nach Gleichung 2.2.2

$$|\tilde{u}(i\eta,t)| \leq \text{const } e^{s_K(\eta,t)}$$

erfüllt, wobei $s_K(\eta,t)$ der Stützfunktion des Einflussbereichs des Ursprungs zur Zeit $t$ entspricht. Wir erhalten

$$e^{t\sigma_{\max}(-\eta)-(t+1)\epsilon|\eta|} \leq p\ e^{s_K(\eta,t)} \leq e^{s_K(\eta,t)+\epsilon|\eta|}$$

mit einer Konstante $p$ für beliebige $\epsilon > 0$, vorausgesetzt $|\eta|$ ist genügend groß. Mit Gleichung 2.2.3 folgt deshalb

$$t\sigma_{\max}(-\eta) - (t+2)\epsilon|\eta| \leq s_K(\eta,t) \leq t\sigma_{\max}(-\eta).$$

$\sigma_{\max}(-\eta)$ und $s_K(\eta,t)$ sind positiv homogene Funktionen in $\eta$. Der Grenzwert $|\eta| \to \infty$ kann somit gebildet werden ohne die Aussage der Ungleichung zu verändern, wodurch $\epsilon$ verschwindet und folgender Satz bewiesen ist.

***Satz 2.21***

*Für die Stützfunktion $s_K$ des Einflussbereichs des Ursprungs zur Zeit $t$ gilt*

$$s_K(\eta,t) = t\sigma_{max}(-\eta).$$

Als Maximum einer positiv homogenen Funktionen auf einer kompakten Menge gilt

$$\begin{aligned}s_K(r\eta+(1-r)\xi) &= \max_{x\in K}(r\eta x+(1-r)\xi x) \leq \max_{x\in K}(r\eta x) + \max_{x\in K}((1-r)\xi x) \\ &= r\max_{x\in K}(\eta x) + (1-r)\max_{x\in K}(\xi x) = rs_K(\eta) + (1-r)s_K(\xi)\end{aligned}$$

für $0 \leq r \leq 1$, weshalb mit Satz 2.21 folgendes Korollar bewiesen wurde.

***Korollar 2.22***

*$\sigma_{max}(-\eta)$ ist eine konvexe Funktion.*

# 3 Eigenschaften hyperbolischer Differentialgleichungen

## 3.1 Charakteristische Flächen und Unstetigkeiten

Wir wollen nun charakteristische Flächen untersuchen und zeigen, dass Unstetigkeiten nur an diesen auftreten können, wobei wir analog zu Peter Lax [5, Kap. 3.4] vorgehen. Sei dazu

$$Lu = \partial_t u - \sum_{i=1}^{n} A_i \partial_{x_i} u = 0 \tag{3.1.1}$$

mit konstanten $n \times n$ Matrizen $A_i$ ein hyperbolisches System erster Ordnung. Sind die Anfangsdaten von $u$ für $t = 0$ gegeben, so können daraus alle Ableitungen bezüglich $x$ und $t$ bestimmt werden.

Eine Hyperebene heißt *frei*, wenn für eine auf ihr vorgegebene Lösung $u$ alle partiellen Ableitungen bezüglich $x$ und $t$ bestimmt werden können. Ist dies nicht der Fall so bezeichnen wir sie als *charakteristisch*.

Die Hyperebene normal zu $(\tau, \xi)$ sei definiert durch

$$s = t\tau + x\xi = 0.$$

Dann liegt $p = \left(\frac{-x\xi}{\tau}, x\right)$ in $s$ und es gilt

$$\partial_t = \tau \partial_s, \qquad \partial_{x_i} = \xi_i \partial_s + \partial_{p_i} - \frac{\xi_i}{\tau} \partial_{p_0},$$

weshalb aus Gleichung 3.1.1

$$\left(\tau \mathbb{1} - \sum_{i=1}^{n} \xi_i A_i\right) \partial_s u - \sum_{i=1}^{n} A_i \left(\partial_{p_i} - \frac{\xi_i}{\tau} \partial_{p_0}\right) u = 0$$

hervorgeht. Für eine auf $s = 0$ vorgegebene Lösung sind $\partial_{p_0} u, \ldots, \partial_{p_n} u$ gegeben, da $p$ parallel zu $s$ liegt. Die zu $s$ normale Ableitung $\partial_s$ und dadurch alle partiellen Ableitungen von $u$ lassen sich somit genau dann bestimmen, wenn

$$\tau \mathbb{1} - \sum_{i=1}^{n} \xi_i A_i$$

invertierbar ist. Sei $\sigma(\xi)$ ein Eigenwert von $\sum_{i=1}^{n} A_i \xi_i$, so ist $s = 0$ genau dann charakteristisch, wenn

$$\tau - \sigma(\xi) = 0 \tag{3.1.2}$$

gilt. Der Begriff der Charakteristik kann auch auf allgemeine Hyperflächen erweitert werden.

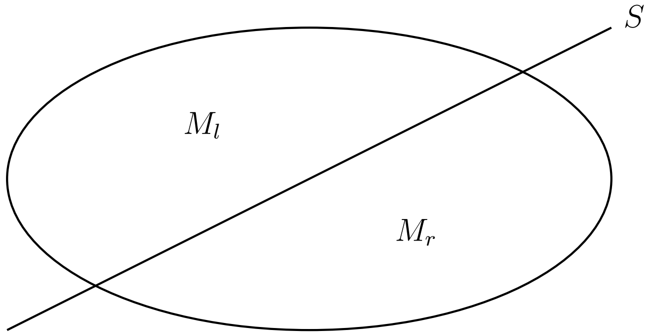


Abbildung 3.1: $M$ wird von $S$ in $M_l$ und $M_r$ geteilt.[a]

***Definition 3.1***
Eine Hyperfläche der Raumzeit heißt *charakteristisch* für den Operator $L$, wenn alle tangentialen Hyperebenen charakteristisch für $L$ sind.

Die Bedeutung von charakteristischen Hyperflächen werden wir uns nun anhand von Unstetigkeiten schwacher Lösungen bewusst machen.

***Definition 3.2***
Eine stückweise differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, die eine Unstetigkeit an der Hyperebene $S$ aufweist, heißt *schwache Lösung* von Gleichung 3.1.1, wenn für alle $C^\infty$ Funktionen $w$ mit kompaktem Träger

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} uL^\dagger w \; dxdt = 0 \tag{3.1.3}$$

mit $L^\dagger = -\partial_t + \sum_i \partial_{x_i} A_i^\dagger$ gilt.

Im Mehrdimensionalen erhalten wir durch partielle Integration

$$\int_V (\partial_i \phi)\, \psi \; dV = \int_{\partial V} \phi\psi \; n_i \; dS - \int_V \phi\, (\partial_i \psi) \; dV,$$

wobei $\partial_i$ eine beliebige der $n+1$ partiellen Ableitungen, $S$ den Rand von $V$ und $n_i$ die $i$-te Komponente des Einheitsnormalenvektors zu $S$ darstellt. Da $w$ kompakten Träger hat, erhalten wir für eine differenzierbare, schwache Lösung $u$

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} (Lu)\, w \; dxdt = 0.$$

Somit ist eine schwache Lösung genau dann eine normale Lösung, wenn sie differenzierbar ist. Die stückweise differenzierbare Funktion $u$ erfüllt also die Differentialgleichung auf beiden Seiten von $S$. Seien $M_l$ und $M_r$ diese Seiten einer offenen Menge $M$ die von $S$ getrennt wird (siehe Abbildung 3.1) und der Träger von $w$ im Abschluss von $M$ enthalten, so wird Gleichung 3.1.3 zu

$$\int_{M_l} uL^\dagger w \; dxdt + \int_{M_r} uL^\dagger w \; dxdt = 0.$$

[a]Die Graphik ist der von Lax [5, S. 27, Abb. 3.1] nachempfunden.

Es gilt $Lu = 0$ auf beiden Seiten von $S$ und $w = 0$ auf dem Rand von $M$. Durch partielle Integration erhalten wir also

$$\int_{S_l} \left( n_{l,0}\mathbb{1} - \sum_i n_{l,i} A_i \right) u_l w \; dS_l + \int_{S_r} \left( n_{r,0}\mathbb{1} - \sum_i n_{r,i} A_i \right) u_r w \; dS_r = 0$$

mit den Normalenvektoren $n_l$ und $n_r$, die jeweils aus ihrer Menge hinaus gerichtet sind. Somit gilt $n_l = -n_r$ und

$$\int_S \left( \tau\mathbb{1} - \sum_i \xi_i A_i \right) [u] w \; dS = 0,$$

wobei $(\xi, \tau)$ normal zu $S$ ist und $[u]$ der Differenz von $u$ auf beiden Seiten von $S$ entspricht. Da $w$ eine beliebige $C^\infty$ Funktion mit kompaktem Träger im Abschluss von $M$ darstellt, gilt

$$\left( \tau\mathbb{1} - \sum_i \xi_i A_i \right) [u] = 0$$

auf $S$. Wäre $S$ nicht charakteristisch, so wäre $\tau\mathbb{1} - \sum_i \xi_i A_i$ invertierbar und $[u] = 0$. Wir haben somit folgenden Satz bewiesen.

***Satz 3.3***

*Unstetigkeiten können nur auf charakteristischen Flächen auftreten.*

Nun wollen wir die charakteristischen Flächen konstruieren. Seien diese gegeben durch $\phi(t, x) = \text{const}$. Dann erhalten wir den dazugehörigen Normalenvektor $(\partial_t\phi, \partial_x\phi)$, der nach Gleichung 3.1.2 zu

$$\partial_t\phi - \sigma(\partial_x\phi) = 0 \tag{3.1.4}$$

führt. Da $G = \sum_i \xi_i A_i = G_0$ entspricht, ist $\sigma$ nach Lemma 2.10 eine homogene Funktion ersten Grades und die Eulersche Homogenitätsrelation

$$\sigma(\xi) = \sum_i \sigma_i \xi_i \tag{3.1.5}$$

mit $\sigma_i = \frac{\partial\sigma(\partial_x\phi)}{\partial_{x_i}}$ ist erfüllt, weshalb wir

$$\partial_t\phi - \sum_i \sigma_i \partial_i\phi = 0 \tag{3.1.6}$$

erhalten. Kurven, die durch

$$\frac{dx_i}{dt} = -\sigma_i(\partial_x\phi) \tag{3.1.7}$$

definiert sind, lösen Gleichung 3.1.6, da auf $\phi = \text{const}$

$$0 = \frac{d}{dt}\phi(t, x(t)) = \partial_t\phi + \sum_i \partial_i\phi \; \frac{dx_i}{dt}$$

gilt. Es soll nun verdeutlicht werden, dass $\partial_x \phi$ und dadurch auch $\sigma_i$ konstant sind und diese Kurven Geraden darstellen. Aus Gleichung 3.1.6 folgt

$$\partial_t \partial_i \phi - \sum_j \sigma_j \partial_j \partial_i \phi - \sum_j \partial_i \sigma_j \partial_j \phi = 0$$

und wir erhalten

$$\frac{d}{dt} \partial_i \phi = \partial_t \partial_i \phi + \sum_j \partial_j \partial_i \phi \, \frac{dx_j}{dt} = \partial_t \partial_i \phi - \sum_j \sigma_j \partial_j \partial_i \phi = \sum_j \partial_i \sigma_j \partial_j \phi = 0,$$

da $\partial_i \sigma$ als partielle Ableitung einer homogenen Funktion ersten Grades konstant ist und sich die letzte Gleichheit somit nach der Eulerschen Homogenitätsrelation ergibt.

Sei $\phi$ zur Zeit $t = 0$ durch eine beliebige $C^\infty$ Funktion $\phi_0$ mit gleichmäßig beschränkten ersten partiellen Ableitungen gegeben, dann entspringt aus jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^k$ eine durch Gleichung 3.1.7 definierte Gerade in den $(x, t)$-Raum auf der $\partial_x \phi = \partial_x \phi_0$ gilt. Da die partiellen Ableitungen gleichmäßig beschränkt sind, existiert eine Zeit $T$, für die diese Geraden die komplette Hyperplatte $\mathbb{R}^k \times (-T, T)$ injektiv füllen. Wir ordnen $\phi$ im Punkt $(x, t)$ dem Wert zu, den $\phi_0$ in dem Punkt hat, der durch die Gerade mit $(x, t)$ verbunden ist. Somit löst $\phi$ Gleichung 3.1.4 und $\phi(x, t) = \text{const}$ ist eine charakteristische Fläche.

Der charakteristische Kegel stellt eine besondere charakteristische Fläche dar. Sei $\sigma(w)$ ein Eigenwert von $\sum_i w_i A_i$, $\rho(w) = \sigma_{max}(-w)$ und $w$ durchlaufe alle Einheitsvektoren. Dann ist der *charakteristische Kegel* im Ursprung definiert durch die in Gleichung 3.1.7 beschriebenen Geraden in Richtung $-\partial_x \sigma(w)$. Besonders interessant ist der charakteristische Kegel zum größten Eigenwert. Sei $H$ der Schnitt dieses Kegels mit der $t = 1$ Hyperebene, was sich durch

$$H = \left\{ (\partial_x \rho(w), 1) \in \mathbb{R}^{k+1} \middle| |w| = 1 \right\}. \tag{3.1.8}$$

darstellen lässt. $\sigma_{max}(\xi)$ ist eine positiv homogene Funktion ersten Grades und nach Korollar 2.22 subadditiv, also sublinear. Somit ist auch $\rho$ sublinear und für $h \geq 0$ gilt

$$\rho(w + h\xi) \leq \rho(w) + h\rho(\xi). \tag{3.1.9}$$

Somit folgt für $\rho(w + \tau\xi)$

$$\frac{d}{d\tau} \rho(w + \tau\xi)\Big|_{\tau=0} = \sum_i \partial_i \rho(w + \tau\xi) \frac{d(w + \tau\xi)_i}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = \sum_i \partial_i \rho(w) \xi_i.$$

Andererseits gilt mit Ungleichung 3.1.9

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \rho(w + \tau\xi)\Big|_{\tau=0} &= \lim_{h \to 0} \frac{\rho(w + (\tau + h)\xi) - \rho(w + \tau\xi)}{h}\Big|_{\tau=0} \\ &\leq \lim_{h \to 0} \frac{\rho(w + \tau\xi) + h\rho(\xi) - \rho(w + \tau\xi)}{h}\Big|_{\tau=0} = \rho(\xi) \end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir

$$\sum_i \partial_i \rho(w) \xi_i \leq \rho(\xi). \tag{3.1.10}$$

Die Stützfunktion von $H$ ist gegeben durch

$$s_H(\xi) = \max_{x \in H} x\xi.$$

Nach der Definition des charakteristischen Kegels 3.1.8 folgt somit $s_H(\xi) \leq \rho(\xi)$. Für jeden Punkt $x \in H$ existiert somit eine Hyperebene, sodass sich $H$ komplett auf einer Seite davon befindet. Nach Gleichung 3.1.5 gilt für $w = \xi$ Gleichheit in 3.1.10 und wir erhalten

$$s_H(\xi) = \rho(\xi) = \sigma_{max}(-\xi).$$

Es existiert also ein Punkt $\partial_x \rho(\xi)$, der auf der Hyperebene liegt. Sie ist somit eine Stützhyperebene und $H$ eine konvexe Hyperfläche. $H$ und sein Inneres, bestehend aus

$$\left\{(r\rho_1(w), \dots, r\rho_k(w), 1) \in \mathbb{R}^{k+1} \middle| |w| = 1,\ 0 \leq r \leq 1\right\}$$

ist eine konvexe Menge. Aus Satz 2.21 wissen wir, dass für die Stützfunktion $s_K(\xi, 1)$ des Einflussbereichs des Ursprungs zur Zeit $t = 1$

$$s_K(\xi, 1) = \sigma_{max}(-\xi) = s_H(\xi)$$

gilt. Wir haben somit folgenden Satz bewiesen.

***Satz 3.4***
*Der Einflussbereich des Ursprungs liegt entweder im oder auf dem Rand des im Ursprung beginnenden charakteristischen Kegel zum Eigenwert $\sigma_{max}$.*

## 3.2 Energieerhaltung

Analog zu Peter Lax [5, Kap. 3.6] wollen wir nun untersuchen, wie sich die Energie eines hyperbolischen Systems mit fortschreitender Zeit verhält. Sei dazu unser System durch

$$u_t - \sum_i A_i u_{x_i} = u_t - Gu = 0 \tag{3.2.1}$$

mit reellen, symmetrischen Matrizen $A_i$ gegeben. Dann gilt folgender Satz.

***Satz 3.5 Energieerhaltung***
*Die Energie einer Lösung von Gleichung 3.2.1 mit kompaktem Träger, definiert durch*

$$E(t) := \|u(t)\|^2 = \int_{\mathbb{R}^k} |u(x,t)|^2 \, dx,$$

*ist zeitunabhängig.*

*Beweis*
Sei $\langle u, w \rangle$ das $L_2$-Skalarprodukt von $u$ und $w$, so kann die Energie als $E = \langle u, u \rangle$ geschrieben werden. Aus Gleichung 2.1.3 ist bekannt, dass für die Fouriertransformation von $u(x,t)$

$$\tilde{u}(\xi, t) = e^{tG(i\xi)}\tilde{u}(\xi, 0) = e^{it\sum_i \xi_i A_i}\tilde{u}(\xi, 0)$$

gilt, weil Differentiation unter Fouriertransformation in Multiplikation mit $i\xi$ übergeht. $A$ ist reell und symmetrisch, was zu

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}(\xi, t)\|^2 &= \langle e^{it\sum_i \xi_i A_i}\tilde{u}(\xi, 0), e^{it\sum_i \xi_i A_i}\tilde{u}(\xi, 0)\rangle \\
&= \langle e^{it\sum_i \xi_i A_i + (it\sum_i \xi_i A_i)^\dagger}\tilde{u}(\xi, 0), \tilde{u}(\xi, 0)\rangle \\
&= \langle e^{it\sum_i \xi_i A_i - it\sum_i \xi_i A_i}\tilde{u}(\xi, 0), \tilde{u}(\xi, 0)\rangle = \|\tilde{u}(\xi, 0)\|^2,
\end{aligned}$$

führt. Da die $L_2$-Norm unter Fouriertransformation erhalten bleibt, folgt

$$\|u(x, t)\|^2 = \|u(x, 0)\|^2.$$

□

# 4 Symmetrische hyperbolische Gleichungen

Im bisherigen Teil wurden nur Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten untersucht. Dies wollen wir nun ändern und folgen dabei den Überlegungen von Fritz John [4, Kap 5.3]. Sei unser Gleichungssystem für die $N$-komponentige Vektorfunktion $u = u(x,t) = u(x_1, \dots, x_n, t)$ durch

$$Lu = A(x,t)\partial_t u + \sum_{k=1}^{n} A_k(x,t)\partial_{x_k} u + B(x,t)u = w(x,t) \tag{4.0.1a}$$

mit reellen $N \times N$ Matrizen $A, A_1, \dots, A_n, B$ und der $N$-komponentigen Vektorfunktion $w$ gegeben. Für auf der $t = 0$ Hyperebene vorgegebene Anfangsdaten kann dies durch Substitution in $u$ und $w$ zur Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 0 \tag{4.0.1b}$$

überführt werden. Ein solches System heißt *symmetrisch hyperbolisch*, wenn die Matrizen $A, A_1, \dots, A_n$ für alle Punkte $(x,t)$ symmetrisch sind und $A$ für alle Punkte $(x,t)$ positiv definit ist.

Sei $(x,t)$ fest und $\xi \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Da $A$ positiv definit ist, existiert ihr Inverses $A^{-1}$, weshalb wir unser System zu

$$A^{-1}Lu = \partial_t u + Gu = \partial_t u + A^{-1}\sum_{k=1}^{n} A_k \partial_{x_k} u + A^{-1}Bu = 0$$

umformen können. Somit ist $G_0(\xi) = A^{-1}\sum_{k=1}^{n} A_k \xi_k$ und für einen Eigenwert $\lambda(i\xi)$ von $G(i\xi)$ zum normierten Eigenvektor $\nu$ gilt

$$\lambda(i\xi)\nu = G(i\xi)\nu = A^{-1}\sum_{k=1}^{n} A_k i\xi_k \nu + A^{-1}B\nu = iA^{-1}\sum_{k=1}^{n} A_k \xi_k \nu + A^{-1}B\nu.$$

Wir multiplizieren mit $A$, bilden das Skalarprodukt und erhalten

$$\lambda(i\xi)\langle \nu, A\nu\rangle = \langle \nu, A\lambda(i\xi)\nu\rangle = i\sum_{k=1}^{n} \xi_k \langle \nu, A_k \nu\rangle + \langle \nu, B\nu\rangle.$$

Alle $A_k$ und $A$ sind reelle, symmetrische Matrizen, weshalb $\langle \nu, A_k\nu\rangle = \langle A_k\nu, \nu\rangle$ folgt. Im Allgemeinen gilt für das Skalarprodukt $\overline{\langle v, w\rangle} = \langle w, v\rangle$, was $\operatorname{Im}\langle \nu, A\nu\rangle = \operatorname{Im}\langle \nu, A_k\nu\rangle = 0$ und

$$|\operatorname{Re}\lambda(i\xi)\langle \nu, A\nu\rangle| = |\langle \nu, B\nu\rangle|$$

ergibt. Da $A$ positiv definit und $|\nu| = 1$ ist, existiert eine Konstante $c > 0$ mit $\langle \nu, A\nu \rangle > c$ und mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$|\mathrm{Re}\,\lambda(i\xi)| = \frac{|\mathrm{Re}\,\lambda(i\xi)\langle \nu, A\nu \rangle|}{\langle \nu, A\nu \rangle} \leq \frac{1}{c}\,|\langle \nu, B\nu \rangle| \leq \frac{1}{c}\,|\nu|\,|Bv| \leq \frac{1}{c}\,\|B\|\,|v| = \frac{1}{c}\,\|B\| \leq \text{const.} \tag{4.0.2}$$

Das zu Gleichung 4.0.1a gehörende charakteristische Polynom erfüllt somit Bedingung (ii) von Definition 2.13 und offensichtlich auch Anforderung (i). Die Differentialgleichung ist also für alle $(x,t)$ auch im vorherigem Sinne hyperbolisch.

Diese Systeme sind deshalb von großer Bedeutung, weil viele hyperbolische Probleme in ein symmetrisches System überführt werden können. Betrachten wir beispielsweise die skalare hyperbolische Differentialgleichung

$$v_{tt} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x,t) v_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) v x_i + c(x,t) v_t + d(x,t) v, \tag{4.0.3}$$

wobei die Koeffizienten $a_{ik}$ eine positiv definite symmetrische Matrix bilden. Für

$$u_1 = v_{x_1}, \quad \dots \quad , \quad u_n = v_{x_n}, \quad u_{n+1} = v_t, \quad u_{n+2} = v$$

genügt

$$A(x,t)\partial_t u + \sum_{k=1}^{n} A_k(x,t)\partial_{x_k} u + B(x,t)u = w(x,t)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & & \\ \vdots & & \vdots & 0 & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & & \\ & 0 & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_k = -\begin{pmatrix} & & & a_{1,k} & \\ & 0 & & \vdots & 0 \\ & & & a_{n,k} & \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,n} & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad w = 0$$

und

$$B = -\begin{pmatrix} & 0 & & 0 & 0 \\ & & & & \\ b_1 & \dots & b_n & c & d \\ & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

der Definition eines symmetrisch hyperbolischen Systems. Außerdem führt es zu den $n+2$ Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_{j,i}\partial_t u_i - \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}\partial_{x_k} u_{n+1} &= 0, \\ \partial_t u_{n+1} - \sum_{k,i=1}^{n} a_{k,i}\partial_{x_k} u_i - \sum_{i=1}^{n} b_i u_i - c u_{n+1} - d u_{n+2} &= 0, \\ \partial_t u_{n+2} - u_{n+1} &= 0, \end{aligned}$$

mit $j = 1, \ldots, n$, welche der Differentialgleichung 4.0.3 entsprechen.

Wir werden nun untersuchen, ob das symmetrisch hyperbolische Anfangswertproblem 4.0.1a,b gelöst werden kann. Dabei werden wir die *Methode der finiten Differenzen* anwenden.

Seien dazu $h, k, T > 0$ zunächst fest gegeben und $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ein Multiindex, wobei die Tilde signalisiert, dass die Komponenten $\alpha_j$ auch negativ sein können. Wir unterteilen $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ in das Gitter

$$M := \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| x = \tilde{\alpha} h, t = mk, 0 \leq m \leq T/k \right\}$$

und definieren die Operatoren $E_j, E_0$ für $1 \leq j \leq n$ durch

$$\begin{aligned} E_j u(x_1, \ldots, x_n, t) &= u(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_n, t), \\ E_0 u(x_1, \ldots, x_n, t) &= u(x_1, \ldots, x_n, t + k). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist für $1 \leq j \leq n$ der zu $E_j$ inverse Operator durch

$$E_j^{-1} u(x_1, \ldots, x_n, t) = u(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - h, x_{j+1}, \ldots, x_n, t)$$

gegeben. Außerdem definieren wir Differenzenquotienten durch

$$\begin{aligned} \delta_j &= \frac{E_j - 1}{h} \qquad \text{für } 1 \leq j \leq n, \\ \delta_0 &= \frac{E_0 - 1}{k}. \end{aligned}$$

Naheliegend wäre nun die Ableitungen in Gleichung 4.0.1a durch diese einseitigen Differenzenquotienten zu ersetzen. Um Stabilität gewährleisten zu können, ist jedoch der Umweg über die *zentralen Differenzenquotienten* nötig. Sei $\Lambda(x,t)$ definiert durch

$$\Lambda(x,t) = \frac{1}{k} A(x,t) \left( E_0 - \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n} \left( E_j + E_j^{-1} \right) \right) + \frac{1}{2h} \sum_{j=1}^{n} A_j(x,t) \left( E_j - E_j^{-1} \right) + B(x,t)$$

und gelte

$$\Lambda v = \frac{1}{k} A \left( E_0 - \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n} \left( E_j + E_j^{-1} \right) \right) v + \frac{1}{2h} \sum_{j=1}^{n} A_j \left( E_j - E_j^{-1} \right) v + Bv = w \tag{4.0.4a}$$

für alle $(x,t)$, für die $(x,t)$ und $(x, t+k)$ in $M$ liegen. Nach Voraussetzung ist $A$ positiv definit, somit invertierbar und wir erhalten

$$\begin{aligned} v(x, t+k) &= E_0 v(x,t) \\ &= kA^{-1} \left( w - \frac{1}{2h} \sum_{j=1}^{n} A_j \left( E_j - E_j^{-1} \right) v - Bv \right) + \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n} \left( E_j + E_j^{-1} \right) v. \end{aligned}$$

Wir haben somit eine Rekursionsformel gefunden, mit der $v(x, t+k)$ mit Hilfe von $w(x,t)$ und $v(y,t)$, wobei $|x_i - y_i| \leq h$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt, ausgedrückt werden kann. Für gegebenes $w(x,t)$ und die Anfangsbedingung

$$v(x, 0) = 0 \tag{4.0.4b}$$

existiert daher eine eindeutige Lösung $v(x,t)$ des Anfangswertproblems 4.0.4a,b in $M$ und $v(x,t)$ ist durch $w$ und $v$ bereits an den Punkten $(y,s)$ bestimmt, für die

$$|y_i - x_i| \leq \frac{h}{k}(t-s) \qquad 0 \leq s \leq t, \forall i = 1,\ldots,n \tag{4.0.5}$$

gilt. Der Abhängigkeitsbereich von $v(x,t)$ bezüglich $w$ ist somit eine Pyramide mit Spitze $(x,t)$. Hat $w(y,s)$ kompakten Träger in $y$ für alle Zeiten $s$, so hat auch $v(x,t)$ kompakten Träger in $x$ für alle Zeiten $t$.

Wir wollen nun zeigen, dass $v$ für $h,k \to 0$ eine Funktion $u$ approximiert, die das Anfangswertproblem 4.0.1a,b löst. Seien dazu die Matrizen $A, A_1, \ldots, A_n, B$ sowie deren Ableitungen stetig und gleichmäßig beschränkt in $\mathbb{R}^n \times (0,T)$ und $A$ gleichmäßig positiv definit, das heißt es existiert eine Konstante $\mu > 0$, sodass

$$\nu^T A(x,t)\nu \geq \mu\nu^T\nu$$

für beliebige Vektoren $\nu$ und alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)$ gilt. Aus Gleichung 4.0.4a erhalten wir

$$AE_0 v = \sum_{j=1}^n \left(a_j E_j + b_j E_j^{-1}\right) v - kBv + kw \tag{4.0.6}$$

mit $a_j = \frac{1}{2n}A - \frac{k}{2h}A_j$ und $b_j = \frac{1}{2n}A + \frac{k}{2h}A_j$. Da $A$ gleichmäßig positiv definit ist und $A_1,\ldots,A_n$ gleichmäßig beschränkt sind, existiert eine Konstante $\lambda > 0$, sodass für $k = \lambda h$ auch die Matrizen $a_1,\ldots,a_n$ und $b_1,\ldots,b_n$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)$ positiv definit sind. Nach der Cholesky-Zerlegung existiert für eine symmetrische, positiv definite Matrix $a$ eine Matrix $C$ mit

$$a = C^T C.$$

Außerdem gilt

$$0 \leq |C\rho - C\nu|^2 = \rho^T C^T C\rho - 2\rho^T C^T C\nu + \nu^T C^T C\nu$$

und deshalb

$$\begin{aligned} 2\rho^T a_i \nu &\leq \rho^T a_i \rho + \nu^T a_i \nu, \\ 2\rho^T b_i \nu &\leq \rho^T b_i \rho + \nu^T b_i \nu \end{aligned}$$

für $i = 1,\ldots,n$ und beliebige Vektoren $\rho$ und $\nu$. Somit folgt nach Gleichung 4.0.6

$$\begin{aligned} 2(E_0v)^T AE_0 v &= 2(E_0v)^T \sum_{j=1}^n \left(a_j E_j + b_j E_j^{-1}\right) v - 2k(E_0v)^T Bv + 2k(E_0v)^T w \\ &\leq (E_0v)^T \sum_{j=1}^n (a_j + b_j)E_0 v + \sum_{j=1}^n (E_j v)^T a_j E_j v + \sum_{j=1}^n (E_j^{-1}v)^T b_j E_j^{-1} v \\ &\quad - 2k(E_0v)^T Bv + 2k(E_0v)^T w \end{aligned}$$

und mit Hilfe von $A = \sum_{j=1}^n (a_j + b_j)$ erhalten wir

$$(E_0v)^T AE_0 v \leq \sum_{j=1}^n (E_j v)^T a_j E_j v + \sum_{j=1}^n (E_j^{-1}v)^T b_j E_j^{-1} v - 2k(E_0v)^T Bv + 2k(E_0v)^T w. \tag{4.0.7}$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned}(E_jv)^T a_j (E_jv) &= E_j \left(v^T a_j v\right) - (E_jv)^T (E_j a_j - a_j)(E_jv) \\ &= E_j \left(v^T a_j v\right) - h (E_jv)^T (\delta_j a_j)(E_jv).\end{aligned} \tag{4.0.8}$$

Nach Voraussetzung ist $A$ und somit auch $E_jA$ gleichmäßig positiv definit. Außerdem sind die Ableitungen von $a_i$ und deshalb auch die Differenzenquotienten von $a_i$ gleichmäßig beschränkt, wodurch wir Konstanten $\tilde{K}$ und $K$ finden, sodass

$$(E_jv)^T (\delta_j a_j)(E_jv) \leq \tilde{K} (E_jv)^T (E_jv) \leq K (E_jv)^T (E_jA)(E_jv) = K E_j \left(v^T A v\right)$$

gilt, was durch Kombination mit Gleichung 4.0.8

$$(E_jv)^T a_j (E_jv) = E_j \left(v^T a_j v\right) + \mathcal{O}\left(h E_j \left(v^T A v\right)\right) \tag{4.0.9a}$$

ergibt. Analog folgt

$$\left(E_j^{-1}v\right)^T b_j \left(E_j^{-1}v\right) = E_j^{-1} \left(v^T b_j v\right) + \mathcal{O}\left(h E_j^{-1} \left(v^T A v\right)\right), \tag{4.0.9b}$$

$$2k (E_0v)^T Bv = \mathcal{O}\left(k E_0 \left(v^T A v\right) + k \left(v^T A v\right)\right), \tag{4.0.9c}$$

$$2k (E_0v)^T w = \mathcal{O}\left(k E_0 \left(v^T A v\right) + k \left(w^T A w\right)\right), \tag{4.0.9d}$$

$$E_0 \left(v^T A v\right) = (E_0v)^T A (E_0v) + \mathcal{O}\left(k E_0 \left(v^T A v\right)\right). \tag{4.0.9e}$$

Zusammengefasst erhalten wir nun aus Gleichungen 4.0.9a,b,c,d,e und 4.0.7

$$\begin{aligned}E_0(v^TAv) \leq{} & \sum_{j=1}^{n} \left(E_j \left(v^T a_j v\right) + E_j^{-1} \left(v^T b_j v\right)\right) \\ & + \mathcal{O}\left(\left(k(E_0+1) + h \sum_{j=1}^{n} \left(E_j + E_j^{-1}\right)\right)\left(v^T A v\right) + k w^T A w\right).\end{aligned} \tag{4.0.10}$$

Sei die Energiesumme $\eta$ durch

$$\eta(t) := h^n \sum_{\tilde{\alpha}} \left(v^T A v\right)(\tilde{\alpha}h, t) = h^n \sum_{\tilde{\alpha}} E_{\tilde{\alpha}} \left(v^T A v\right)(0, t) \tag{4.0.11}$$

und $\zeta$ analog dazu durch

$$\zeta(t) := h^n \sum_{\tilde{\alpha}} \left(w^T A w\right)(\tilde{\alpha}h, t) = h^n \sum_{\tilde{\alpha}} E_{\tilde{\alpha}} \left(w^T A w\right)(0, t) \tag{4.0.12}$$

bestimmt. Hierbei wird über alle Vielfachen von $h$ summiert, wodurch $E_j \left(v^T A v\right)$ und $E_j^{-1} \left(v^T A v\right)$ durch $v^T A v$ ersetzt werden können. Somit folgt nach Gleichung 4.0.10

$$\begin{aligned}\eta(t+k) &= h^n \sum_{\tilde{\alpha}} E_0 \left(v^T A v\right)(\tilde{\alpha}h, t) \\ &\leq \eta(t) + \mathcal{O}\left(k\eta(t+k) + h\eta(t) + k\eta(t) + k\zeta(t)\right) \\ &\leq \eta(t) + K\left(k\eta(t+k) + (h+k)\eta(t) + k\zeta(t)\right)\end{aligned}$$

mit einer Konstante $K > 0$. Wir lassen $k = \lambda h$ so klein werden, dass $Kk < \frac{1}{2}$ gilt. Dann existiert nach Lemma C.1 eine Konstante $C$, sodass

$$\begin{aligned}\eta(t+k) &\leq \frac{1}{1-Kk}\left(Kh + Kk + 1\right)\eta(t) + \frac{Kk}{1-Kk}\zeta(t) \\ &\leq e^{Ck}\eta(t) + \gamma k\zeta(t)\end{aligned}$$

mit $\gamma = 2K$ folgt. Wir haben somit eine Rekursionsformel für $\eta(t)$ gefunden. Durch die Anfangsbedingung 4.0.1b gilt $\eta(0) = 0$ und wir können die Energie zur Zeit $t = mk < T$ durch

$$\eta(t) \leq k\gamma \sum_{\nu=0}^{m-1} e^{\nu Ck}\zeta(t-(\nu+1)k) \leq k\gamma e^{CT}\sum_{\nu=0}^{m}\zeta(\nu k) \tag{4.0.13}$$

abschätzen. Sei die Norm $\|v\|$ des Vektors $v(x,t)$ durch

$$\|v\|^2 := h^n k \sum_{(x,t)\in M}\left(v^T A v\right)(x,t) = k \sum_{0\leq m\leq \frac{T}{k}} \eta(mk),$$

definiert, so folgt für $w(x,t)$

$$\|w\|^2 = h^n k \sum_{(x,t)\in M}\left(w^T A w\right)(x,t) = k \sum_{0\leq m\leq \frac{T}{k}} \zeta(mk).$$

Ungleichung 4.0.13 liefert somit direkt

$$\begin{aligned}\|v\|^2 = k\sum_{0\leq m\leq \frac{T}{k}}\eta(mk) &\leq k^2\gamma e^{CT}\sum_{0\leq m\leq \frac{T}{k}}\sum_{\nu=0}^{m}\zeta(\nu k) \\ &\leq \gamma T e^{CT} k \sum_{0\leq \nu\leq \frac{T}{k}}\zeta(\nu k) = \gamma T e^{CT}\|w\|^2 = \gamma T e^{CT}\|\Lambda v\|^2.\end{aligned} \tag{4.0.14}$$

Wir wollen nun auch die Ableitungen von $v$ abschätzen, wozu wir jedoch erst folgende Gleichungen benötigen. Für $j = 1, \ldots, n$ gelten

$$\begin{aligned}\delta_j(\phi\psi) &= \frac{1}{h}\left(\left(E_j\phi\right)\left(E_j\psi\right) - \phi\left(E_j\psi\right)\right) + \frac{1}{h}\left(\phi\left(E_j\psi\right) - \phi\psi\right) \\ &= \left(\delta_j\phi\right)\left(E_j\psi\right) + \phi\left(\delta_j\psi\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\left(E_0 - \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}\left(E_j + E_j^{-1}\right)\right) &= \delta_0 - \frac{1}{2nk}\left(-2n + \sum_{j=1}^{n}\left(E_j + E_j^{-1}\right)\right) \\ &= \delta_0 - \frac{1}{2nk}\sum_{j=1}^{n}\left(E_j + E_j^{-1} - E_j^{-1}E_j - 1\right) \\ &= \delta_0 - \frac{1}{2nk}\sum_{j=1}^{n}\left(\left(E_j - 1\right)\left(E_j^{-1} - 1\right)\right) \\ &= \delta_0 - \frac{1}{2n\lambda}\sum_{j=1}^{n}\left((E_j^{-1} - 1)\delta_j\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2h}\left(E_j - E_j^{-1}\right) &= \frac{1}{2h}\left(E_j - E_j^{-1} + E_j E_j^{-1} - 1\right)\\ &= \frac{1}{2h}\left(E_j - 1\right)\left(E_j^{-1} + 1\right)\\ &= \frac{1}{2}(E_j^{-1} + 1)\delta_j.\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\Lambda v = A\left(\delta_0 - \frac{1}{2n\lambda}\sum_{j=1}^{n}\left((E_j^{-1} - 1)\delta_j\right)\right)v + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(A_j(E_j^{-1} + 1)\delta_j\right)v + Bv = w \tag{4.0.15}$$

und

$$\begin{aligned}\Lambda\delta_r v &= \delta_r\left(\Lambda v\right) - \left(\delta_r\Lambda\right)\left(E_r v\right) =\\ &= \delta_r w - \left(\delta_r A\right)\left(\delta_0 - \frac{1}{2n\lambda}\sum_{j=1}^{n}\left((E_j^{-1} - 1)\delta_j\right)\right)\left(E_r v\right)\\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\delta_r A_j\right)\left(1 + E_j^{-1}\right)\delta_j\right)\left(E_r v\right) - \left(\delta_r B\right)\left(E_r v\right)\\ &= \delta_r w + C_0\delta_0 E_r v + \sum_{j=1}^{n} C_j E_j^{-1}\delta_j E_r v + \sum_{j=1}^{n} C_{n+j}\delta_j E_r v + \sum_{j=1}^{n} C_{2n+1} E_r v\end{aligned}$$

mit gewissen Matrizen $C_i$. Nach Voraussetzung sind $A, A_1, \ldots, A_n, B$ und deren Ableitungen gleichmäßig beschränkt, wodurch auch alle $C_1, \ldots, C_{2n+1}$ ebenfalls gleichmäßig beschränkt sind. Wir finden also ein Konstanten $\bar{c}$ und $\tilde{c}$, sodass

$$\begin{aligned}\|\Lambda\delta_r v\|^2 &\le \|\delta_r w\|^2 + \bar{c}\left(\|\delta_0 E_r v\|^2 + \sum_{j=1}^{n}\|E_j^{-1}\delta_j E_r v\|^2 + \sum_{j=1}^{n}\|\delta_j E_r v\|^2 + \|E_r v\|^2\right)\\ &\le \|\delta_r w\|^2 + \tilde{c}\left(\|\delta_0 v\|^2 + \sum_{j=1}^{n}\|\delta_j v\|^2 + \|v\|^2\right)\end{aligned}$$

gilt. Außerdem ist $A$ invertierbar, wodurch wir nach Gleichung 4.0.15 auf

$$\begin{aligned}\|\delta_0 v\|^2 &= \left\|A^{-1}\left(w - Bv - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(A_j(1 + E_j^{-1})\delta_j\right)\right)v + \frac{1}{2n\lambda}\sum_{j=1}\left((E_j^{-1} - 1)\delta_j\right)v\right\|^2\\ &\le \hat{c}\left(\|w\|^2 + \|v\|^2 + \sum_{j=1}^{n}\|\delta_j v\|^2\right)\end{aligned} \tag{4.0.16}$$

kommen, was uns schließlich zu

$$\|\Lambda\delta_r v\|^2 \le \tilde{\tilde{c}}\left(\|w\|^2 + \|v\|^2 + \|\delta_r w\|^2 + \sum_{j=1}^{n}\|\delta_j v\|^2\right) \tag{4.0.17}$$

führt. Wir substituieren $v$ durch $\delta_r v$ in Gleichung 4.0.14 und erhalten

$$\|\delta_r v\|^2 \le \gamma T e^{CT}\|\Lambda\delta_r v\|^2 \le c\gamma T e^{CT}\left(\|w\|^2 + \|\delta_r w\|^2 + \sum_{j=1}^{n}\|\delta_j v\|^2\right)$$

mit einer Konstante $c$. Hieraus folgt

$$\sum_{r=1}^{n} \|\delta_r v\|^2 = \mathcal{O}\left( \|w\|^2 + \sum_{r=1}^{n} \|\delta_r w\|^2 \right)$$

und somit auch

$$\|\Lambda \delta_i v\|^2 = \mathcal{O}\left( \|w\|^2 + \sum_{r=1}^{n} \|\delta_r w\|^2 \right)$$

für $i = 1, \dots, n$, vorausgesetzt $T$ ist klein genug. Wiederholtes Anwenden dieser Berechnungen führt uns schließlich zu

$$\sum_{|\alpha| \leq s} \|\delta^\alpha v\|^2 = \mathcal{O}\left( \sum_{|\alpha| \leq s} \|\delta^\alpha w\|^2 \right),$$

und folglich auch

$$\|\Lambda \delta^\alpha v\|^2 = \mathcal{O}\left( \sum_{|\beta| \leq s} \|\delta^\beta w\|^2 \right) \tag{4.0.18}$$

für $|\alpha| \leq s$, wobei $\delta^\alpha = (\delta_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (\delta_n)^{\alpha_n}$ darstellt. Ungleichung 4.0.13 liefert zusammen mit den Definitionen 4.0.11 und 4.0.12 von $\eta(t)$ beziehungsweise $\zeta(t)$

$$\begin{aligned}
h^n \sum_{\tilde{\alpha}} \left( v^T A v \right) (\tilde{\alpha} h, t) = \eta(t) &\leq k \gamma e^{CT} \sum_{0 \leq \nu \leq m} \zeta(\nu k) \\
&= k h^n \gamma e^{CT} \sum_{0 \leq \nu \leq m} \sum_{\tilde{\alpha}} \left( w^T A w \right) (\tilde{\alpha} h, \nu k) \\
&\leq k h^n \gamma e^{CT} \sum_{0 \leq \nu \leq \frac{T}{k}} \sum_{\tilde{\alpha}} \left( w^T A w \right) (\tilde{\alpha} h, \nu k) \\
&= \gamma e^{CT} \|w\|^2 = \gamma e^{CT} \|\Lambda v\|^2
\end{aligned}$$

für $0 \leq t = mk \leq T$. Wir substituieren $v$ durch $\delta^\alpha v$ und erhalten

$$h^n \sum_{\tilde{\alpha}} (\delta^\alpha v)^T A (\delta^\alpha v) (\tilde{\alpha} h, t) = \mathcal{O}\left( \|\Lambda \delta^\alpha v\|^2 \right),$$

was mit Hilfe von Gleichung 4.0.18 zu

$$h^n \sum_{\tilde{\alpha}} (\delta^\alpha v)^T A (\delta^\alpha v) (\tilde{\alpha} h, t) = \mathcal{O}\left( \sum_{|\beta| \leq s} \|\delta^\beta w\|^2 \right) \tag{4.0.19}$$

führt. Wir wollen diese Einschränkungen nun auf punktweise Abschätzungen präzisieren. Sei dazu $g(x)$ eine skalare Funktion mit eindimensionalem Argument $x$ und $r \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Mit $\delta g(y) = \frac{g(y+h) - g(y)}{h}$ gilt

$$\begin{aligned}
g(x) &= g(x + rh) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \left( g(x + \nu h + 1) - g(x + \nu h) \right) \\
&= g(x + rh) - h \sum_{\nu=0}^{r-1} \delta g(x + \nu h).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$g^2(x) \leq 2g^2(x+rh) + rh^2 \sum_{\nu=0}^{r-1} (\delta g)^2 (x+\nu h)$$

und für $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} pg^2(x) = \sum_{r=0}^{p-1} g^2(x) &\leq 2\sum_{r=0}^{p-1} g^2(x+rh) + h^2 \sum_{r=0}^{p-1} r \sum_{\nu=0}^{r-1} (\delta g)^2 (x+\nu h) \\ &\leq 2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} g^2(x+rh) + h^2 \sum_{r=0}^{p-1} r \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (\delta g)^2 (x+\nu h) \\ &\leq 2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} g^2(x+rh) + h^2 p^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} (\delta g)^2 (x+rh). \end{aligned}$$

Sei $p$ bestimmt durch $\frac{1}{h} \leq p < \frac{1}{h} + 1$ und $h < \sqrt{2} - 1$, so folgt $p^2 h^2 < 2$ und deshalb auch

$$\begin{aligned} g^2(x) &\leq \frac{2}{p} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(g^2 + (\delta g)^2\right)(x+rh) \\ &\leq 2h \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(g^2 + (\delta g)^2\right)(x+rh). \end{aligned}$$

Angenommen, $x$ ist ein Vielfaches von $h$, so lässt es sich aufgrund der Summation über alle $r \in \mathbb{Z}$ durch 0 ersetzen, weshalb

$$g^2(x) \leq 2h \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(g^2 + (\delta g)^2\right)(rh)$$

gilt. Analog erhält man für eine Funktion $g(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned} g^2(x_1, x_2) &\leq 2h \sum_{r_1=-\infty}^{\infty} \left(g^2 + (\delta_1 g)^2\right)(r_1 h, x_2) \\ &\leq (2h)^2 \sum_{r_1, r_2=-\infty}^{\infty} \left(g^2 + (\delta_1 g)^2 + (\delta_2 g)^2 + (\delta_1 \delta_2 g)^2\right)(r_1 h, r_2 h) \end{aligned}$$

und induktiv für beliebiges $x = \tilde{\gamma} h \in \mathbb{R}^n$

$$g^2(x) \leq (2h)^n \sum_{\tilde{\beta}} \sum_{|\tilde{\alpha}| \leq n} \left(\delta^{\tilde{\alpha}} g\right)^2 (\beta h).$$

Somit gilt dies auch für alle Komponenten von $\delta^\alpha v$ einer Lösung $v$ des Anfangswertproblems 4.0.4a,b in $M$ und wir erhalten nach Gleichung 4.0.19

$$|\delta^\alpha v(x,t)|^2 = \mathcal{O}\left(\sum_{|\beta| \leq |\alpha| + n} \|\delta^\beta w\|^2\right), \tag{4.0.20}$$

vorausgesetzt $T$ ist klein genug. Für den $N$-komponentigen Vektor $w$ folgt

$$\begin{aligned}\|\delta^\beta w\|^2 &= h^n k \sum_{(x,t)\in M} \left(\delta^\beta w\right)^T A \left(\delta^\beta w\right)(x,t) \\ &= \mathcal{O}\left(h^n k \sum_{(x,t)\in M} \left(\delta^\beta w\right)^T \left(\delta^\beta w\right)(x,t)\right) \\ &= \mathcal{O}\left(h^n k \sum_{(x,t)\in M} \sum_{r=1}^{N} \left(\delta^\beta w_r(x,t)\right)^2\right)\end{aligned} \tag{4.0.21}$$

und für jede Komponente gilt nach Mittelwertsatz

$$\min_{|y-x|\le h} \partial_{y_j} w_r(y,t) \le \delta_j w_r(x,t) \le \max_{|y-x|\le h} \partial_{y_j} w_r(y,t).$$

Durch wiederholtes Anwenden dieses Satzes kommen wir zu

$$\min_{|y-x|\le sh} \partial_y^\alpha w_r(y,t) \le \delta^\alpha w_r(x,t) \le \max_{|y-x|\le sh} \partial_y^\alpha w_r(y,t)$$

für $|\alpha| \le s$. Für $w \in C^s$ ist $\partial_y^\alpha w_r(y,t)$ stetig und es existiert ein $y$ im Ball $|y-x| \le sh$, sodass

$$\partial_y^\alpha w_r(y,t) = \delta^\alpha w_r(x,t)$$

gilt. Somit entspricht

$$h^n k \sum_{(x,t)\in M} \left(\delta^\beta w_r(x,t)\right)^2$$

der Riemann-Summe von

$$\int_{\mathbb{R}^n\times(0,T)} \left(\partial_x^\beta w_r(x,t)\right)^2 \, dxdt.$$

Für $h \to 0$ erhalten wir durch Gleichungen 4.0.20 und 4.0.21

$$|\delta^\alpha v(x,t)|^2 = \mathcal{O}\left(\sum_{|\beta|\le|\alpha|+n} \int_{\mathbb{R}^n\times(0,T)} \left|\partial_x^\beta w(x,t)\right|^2 \, dxdt\right)$$

und nach Ungleichung 4.0.16

$$|\delta_0^i \delta^\alpha v(x,t)|^2 = \mathcal{O}\left(\sum_{|\beta|\le|\alpha|+n+i} \int_{\mathbb{R}^n\times(0,T)} \left|\partial_x^\beta w(x,t)\right|^2 \, dxdt\right) \tag{4.0.22}$$

für alle $(x,t) \in M$. Sei $w(x,t) \in C^{n+2}(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ mit kompaktem Träger in $x$, dann sind nach Gleichung 4.0.22 $v(x,t)$ und alle Differenzenquotienten von $v(x,t)$ bis zur Ordnung 2 von $h$ unabhängig, also gleichmäßig beschränkt auf $M$, wodurch $v(x,t)$ und alle einfachen Differenzenquotienten Lipschitz-stetig mit einer von $h$ unabhängigen Lipschitz-Konstante sind. Somit lässt sich $M$ verfeinern. Sei dazu $M_q$ für $q \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$M_q = \left\{(x,t) \in M \middle| h = 2^{-q}, k = \lambda 2^{-q}\right\}$$

und $v^q(x,t)$ die Lösung von 4.0.4a,b auf $M_q$. Als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist $\sigma = \bigcup_q M_q$ wieder abzählbar. Außerdem ist die Folge der Mengen $M_q$ monoton steigend, sodass $v^q(x,t)$ für alle $(x,t) \in M_{q'}$ mit $q' \leq q$ definiert ist. Ebenso sind die Funktionen $\delta_0^i \delta^\alpha v$ auf allen Mengen $M_{q'}$ gegeben, wobei die Differenzenquotienten bezüglich $M_q$ bestimmt wurden. Für $|\alpha| + i \leq 2$ sind $\delta_0^i \delta^\alpha v$ gleichmäßig beschränkt auf $M_{q'}$. Somit existiert zu jedem Punkt $(x,t) \in \sigma$ eine Teilfolge $S$ natürlicher Zahlen für die

$$\lim_{\substack{q \in S \\ q \to \infty}} \delta_0^i \delta^\alpha v^q(x,t) = u^{i,\alpha}(x,t)$$

für $|\alpha| + i \leq 1$ existiert und $u^{i,\alpha}(x,t)$ ist ebenso Lipschitz-stetig und gleichmäßig beschränkt. Da $\sigma$ dicht in $\mathbb{R}^n \times (0,T)$ liegt, lässt sich $u^{i,\alpha}(x,t)$ auf ganz $\mathbb{R}^n \times (0,T)$ erweitern, ohne die Lipschitz-Stetigkeit oder die gleichmäßige Beschränktheit zu verlieren.

Wir wollen nun untersuchen, ob für $q \to \infty$, $|\alpha| + i \leq 1$ und $u = u^{0,0}$ das System $\Lambda v^q = w$ tatsächlich in $Lu = w$ und $u^{i,\alpha}$ in $\partial_t^i \partial_x^\alpha u$ übergeht. Es gelten

$$(E_j^{-1} - 1)\delta_j v^q = -E_j^{-1} 2^{-q} \delta_j^2 v^q$$

und

$$(E_j^{-1} + 1)\delta_j v^q = \left(2\delta_j - E_j^{-1} 2^{-q} \delta_j^2\right) v^q,$$

wodurch wir aus Gleichung 4.0.15

$$\Lambda v^q = A\left(\delta_0 + \frac{1}{2n\lambda} \sum_{j=1}^n E_j^{-1} 2^{-q} \delta_j^2\right) v^q + \sum_{j=1}^n \left(A_j \delta_j - \frac{1}{2} E_j^{-1} 2^{-q} \delta_j^2\right) v^q + B v^q = w$$

erhalten, was für $q \to \infty$ in $Lu = w$ übergeht, da $\delta_j^2 v^q$ gleichmäßig beschränkt ist.
Um zu zeigen, dass $u^{i,\alpha}(x,t)$ in $\partial_t^i \partial_x^\alpha u(x,t)$ übergeht, seien $(x,t)$ und $(x,t+c)$ aus $\sigma$, wobei $c$ einem Vielfachen von $k$ entspricht. Dann existiert ein $q'$, sodass für alle $q$ mit $q \geq q'$ $(x,t)$ und $(x,t+c)$ in $M_q$ enthalten sind. Außerdem gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $q'' > q'$, sodass für alle $q$ mit $q \geq q''$

$$|u(x,t) - v^q(x,t)| < \epsilon \qquad \text{und} \qquad |u(x,t+c) - v^q(x,t+c)| < \epsilon$$

gilt, wodurch

$$\left| \frac{u(x,t+c) - u(x,t)}{c} - \frac{v^q(x,t+c) - v^q(x,t)}{c} \right| < \frac{2\epsilon}{c} \tag{4.0.23}$$

hervorgeht. Zudem erhalten wir für $c = mk$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{v^q(x,t+c) - v^q(x,t)}{c} - \delta_0 v^q(x,t) \right| &= \left| \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{v^q(x,t+(\nu+1)k) - v^q(x,t+\nu k)}{mk} - \delta_0 v^q(x,t) \right| \\
&= \left| \frac{1}{m} \left( \sum_{\nu=0}^{m-1} \delta_0 v^q(x,t+\nu k) \right) - \delta_0 v^q(x,t) \right| \\
&= \left| \frac{k}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \delta_0 \frac{v^q(x,t+\nu k) - v^q(x,t)}{k} \right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \frac{k}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \delta_0 \frac{v^q(x, t+(\mu+1)k) - v^q(x, t+\mu k)}{k} \right| \\
&= \left| \frac{k}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \delta_0^2 v^q(x, t+\mu k) \right| \\
&\leq kmM = cM
\end{aligned}
$$

mit einer Konstante $M$, da $\delta_0^2 v^q$ gleichmäßig beschränkt ist. Hieraus folgt mit Hilfe von Ungleichung 4.0.23

$$
\left| \frac{u(x, t+c) - u(x, t)}{c} - \delta_0 v^q(x, t) \right| \leq \frac{2\epsilon}{c} + cM.
$$

Wir bilden zunächst den Grenzwert $q \to \infty$, wodurch $v^q$ in $u^{0,0}$ übergeht und $\epsilon$ beliebig klein gewählt werden kann, weshalb wir

$$
\left| \frac{u(x, t+c) - u(x, t)}{c} - u^{1,0}(x, t) \right| \leq cM \tag{4.0.24}
$$

für $(x, t)$ und $(x, t+c) \in \sigma$ bekommen. Für $|\alpha| + i \leq 1$ sind $u$ und $u^{i,\alpha}$ Lipschitz-stetig, wodurch Ungleichung 4.0.24 auch für alle $(x, t), (x, t+c) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$ gilt. Wir können somit auch $c \to 0$ laufen lassen und erhalten

$$
\left| \partial_t u(x, t) - u^{1,0}(x, t) \right| = 0.
$$

Für $q \to \infty$ geht $u^{1,0}$ also tatsächlich in $\partial_t u$ über. Analog konvergiert $u^{0,\alpha}$ gegen $\partial_x^\alpha u$ für $|\alpha| = 1$. Wir haben somit folgenden Satz bewiesen.

***Satz 4.1***

*Für ein geeignet kleines $T$ und $0 \leq t \leq T$ existiert eine eindeutige Lösung $u(x, t)$ des Anfangswertproblems 4.0.1a,b, vorausgesetzt $w(x, t)$ ist $n+2$ mal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ und hat einen kompakten Träger in $x$.*

Da $v$ in $u$ übergeht und sich der Einfluss von $v$ nach Ungleichung 4.0.5 mit endlicher Geschwindigkeit $\frac{h}{k} = \frac{1}{\lambda} = \text{const} > 0$ ausbreitet, besitzt auch $u$ eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.

# 5 Die Wellengleichung

Die Wellengleichung $u_{tt} - c^2\Delta u = 0$ gilt als Paradebeispiel einer hyperbolischen Differentialgleichung und findet sich in vielen physikalischen Systemen wieder. Um zu verstehen, wieso sie so häufig vorkommt, untersuchen wir, wie sich eine Auslenkung in einem Medium verhält, wobei wir zunächst wie Lawrence Evans [1, Kap. 2.4] vorgehen.

Sei $u(x,t)$ die Auslenkung aus der Ruhelage in eine beliebige Richtung im Punkt $x$ zur Zeit $t$. Dann ist die Beschleunigung einer beliebigen Teilmenge $V$ des Mediums durch

$$\partial_{tt} \int_V u(x,t)\ dx = \int_V u_{tt}(x,t)\ dx$$

und die auf die Teilmenge von außen wirkende Gesamtkraft durch

$$\int_{\partial V} -F(x,t)\nu\ dS$$

gegeben, wobei $F(x,t)$ der punktuellen Kraft in $(x,t)$ und $\nu$ dem nach außen gerichteten Normalenvektor des Oberflächenstücks $dS$ von $V$ entspricht. Für konstante Dichte $m(x,t) = m$ des Mediums erhalten wir nach Newtons zweitem Gesetz und Gaußschem Integralsatz

$$m\int_V u_{tt}(x,t)\ dx = \int_{\partial V} -F(x,t)\nu\ dS = \int_V -\operatorname{div} F(x,t)\ dx,$$

wodurch wir

$$m\ u_{tt}(x,t) = -\operatorname{div} F(x,t) \tag{5.0.1}$$

bekommen, da $V$ ein beliebiger Teil des Mediums ist. Um diese Kraft zu berechnen, betrachten wir, analog zu Christian Gerthsen [3, S. 101 f.], eine kleine eindimensionale Verschiebung $du(x,t)$ eines elastischen Mediums in $x_1$-Richtung. Für einen Quader $V = Al$, wobei $l$ die Länge parallel und $A$ die Querschnittsfläche senkrecht zu $x_1$ darstellt, folgt somit eine Volumen- und Druckänderung. Wir erhalten das neue Volumen durch

$$V' = V + dV = Al + A\frac{du(x,t)}{dx_1}dx_1.$$

Mit Hilfe der Kompressibilität $\kappa$, welche durch

$$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp}$$

definiert ist, folgt für die Druckänderung

$$dp = -\frac{1}{\kappa V}dV = -\frac{1}{\kappa}\frac{A}{V}\frac{du(x,t)}{dx_1}dx_1.$$

Für kleine Auslenkungen kann die $x_1$-Komponente der Kraft, für die $F_1 = pA$ gilt, somit durch

$$F_1(x,t) = -\mathrm{const}\frac{du(x,t)}{dx_1}$$

beschrieben werden, was für den dreidimensionale Fall zu

$$F(x,t) = -a \ \operatorname{grad} u(x,t)$$

verallgemeinert werden kann. Hieraus und durch Gleichung 5.0.1 gilt

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$$

mit einer Konstante $c$.

Die dreidimensionale Wellengleichung beschreibt somit die Vibration eines elastischen Körpers, der zweidimensionale Fall eine Membran und eindimensional eine Saite.

Ein weiteres Beispiel sind die *Maxwellgleichungen* im Vakuum, gegeben durch

$$\operatorname{div} E = 0 \qquad \operatorname{div} B = 0 \tag{5.0.2a}$$

$$\operatorname{rot} E = -\partial_t B \qquad \operatorname{rot} B = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t E, \tag{5.0.2b}$$

wobei $E$ die elektrische Feldstärke, $B$ die magnetische Flussdichte und $\mu_0, \epsilon_0$ die Permeabilität beziehungsweise Permittivität des Vakuums darstellen. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\partial_{tt} E &= \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \partial_t \ \operatorname{rot} B \\
&= -\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} E) \\
&= \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Delta E - \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \operatorname{grad}(\operatorname{div} E) \\
&= \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Delta E
\end{aligned}$$

und analog

$$\partial_{tt} B = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Delta B.$$

Elektromagnetische Signale unterliegen somit auch der Wellengleichung. Eine zweimal differenzierbare Funktion $F(x,t) = Af(kx - ct)$ mit konstanten Vektoren $A, k \in \mathbb{R}^3$, $k^2 = 1$ und $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ löst diese Differentialgleichung. Somit folgt

$$\begin{aligned}
E &= E_0 f_E(kx - ct), \\
B &= B_0 f_B(kx - ct)
\end{aligned}$$

und durch Gleichung 5.0.2a

$$\begin{aligned}
k \cdot E_0 f_E'(kx - ct) &= 0, \\
k \cdot B_0 f_B'(kx - ct) &= 0.
\end{aligned}$$

Beide Felder stehen also senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Mit 5.0.2b sehen wir, dass für alle $x, t$

$$k \times E_0 f_E'(kx - ct) = \operatorname{rot} E = -\partial_t B = cB_0 f_B'(kx - ct)$$

gilt. $E$, $B$ und $k$ stehen somit orthogonal zueinander und $f_E'$ entspricht $f_B'$. Betrachten wir eine sinusförmige Anregung, beispielsweise durch eine Sendeantenne, so erhalten wir ein in Phase schwingendes System

$$\begin{aligned} E &= E_0 \sin(kx - ct), \\ B &= B_0 \sin(kx - ct), \end{aligned}$$

dessen $E$- und $B$-Feld orthogonal zueinander und zur Ausbreitungsrichtung $k$ schwingen. (siehe Abbildung 5.1)

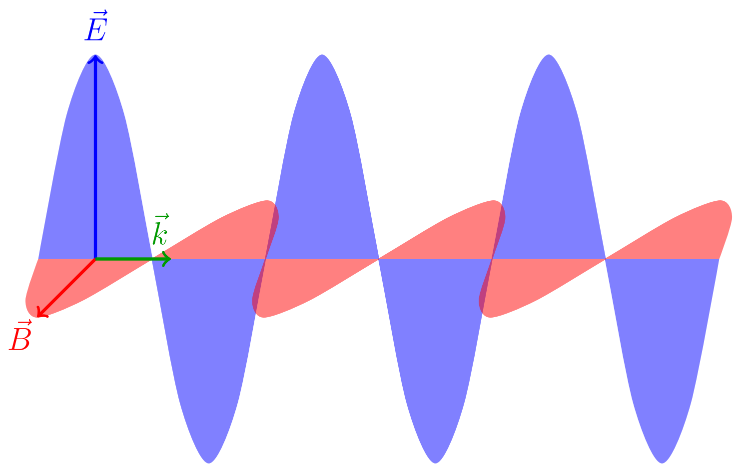


Abbildung 5.1: Die elektrische Feldstärke $E$, die magnetische Flussdichte $B$ und die Ausbreitungsrichtung $k$ einer Elektromagnetischen Welle stehen orthogonal zueinander.

## 5.1 Eigenschaften der Wellengleichung

Wir wollen nun die zuvor untersuchten Eigenschaften hyperbolischer Gleichungen anhand der Wellengleichung verifizieren. Zunächst überprüfen wir, ob sie tatsächlich hyperbolisch ist. Für

$$v = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}, \qquad G(\partial_x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2\Delta & 0 \end{pmatrix}$$

entspricht

$$v_t - Gv = 0$$

der Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0.$$

Daher empfiehlt es sich, Anfangsdaten für $u$ und $u_t$ also ganz $v$ vorzugeben. Die Eigenwerte $\sigma(i\xi)$ von $G(i\xi)$ entsprechen den Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\tau^2 + c^2\xi^2,$$

dessen Grad in $\tau$ dem in $\xi$ entspricht und somit Eigenschaft (i) in Satz 2.6 erfüllt. Für $\xi \in \mathbb{R}^n$ sind die Eigenwerte folglich durch

$$\lambda_\pm(i\xi) = \pm ic|\xi|$$

gegeben und erfüllen auch Eigenschaft (ii) in Satz 2.6. Sie ist also hyperbolisch. Außerdem entspricht $G(\xi)$ dem Hauptteil $G_0(\xi)$, dessen Eigenwerte

$$\sigma_\pm(\xi) = \pm c|\xi|$$

für reelle $\xi$ ebenso reell und für $\xi \neq 0$ paarweise verschieden sind. Die Wellengleichung ist somit strikt hyperbolisch. Wir wollen nun Eigenschaften (1), (3) und (4) aus Kapitel 2.1 überprüfen.

(4) Eine Lösung $u(x,t)$ der Wellengleichung wird in $(x_0,t_0)$ nur von Punkten des *charakteristischen Kegels*

$$C = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle|\ 0 \leq t \leq t_0,\ |x_0 - x| \leq c(t_0 - t)\right\}$$

beeinflusst, denn angenommen, $u$ und $u_t$ verschwinden auf $B(x_0, ct_0)$, so ist $u = 0$ in ganz $C$ (vgl. Abbildung 5.2).

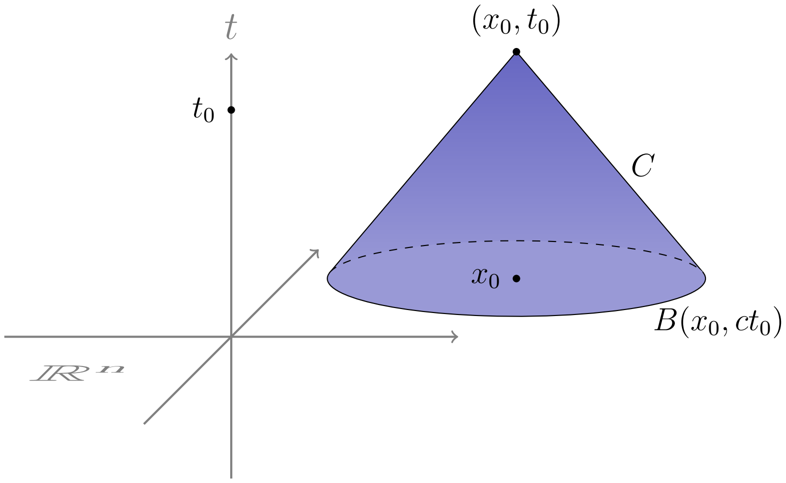


Abbildung 5.2: Der charakteristische Kegel $C$ in $(x_0,t_0)$ entspricht dem Abhängigkeitsbereich von $(x_0,t_0)$.[a]

[a]Die Abbildung ist Lawrence Evans Graphik [1, Kap. 2.4.3b] nachempfunden.

*Beweis*
Die Beweisidee hierzu kommt von Lawrence C. Evans [1, Kap. 2.4.3b]. Sei die Energie $e(t)$ durch

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{B(x_0,t_0-t)} u_t^2(x,t) + c^2 |\operatorname{grad} u(x,t)|^2 \; dx$$

definiert, so folgt per partieller Integration

$$\begin{aligned}
\partial_t e(t) &= \int_{B(x_0,t_0-t)} u_t u_{tt} + c^2 \left(\operatorname{grad} u\right)^T \operatorname{grad} u_t \; dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0,t_0-t)} u_t^2(x,t) + c^2 |\operatorname{grad} u(x,t)|^2 \; dS(x) \\
&= \int_{B(x_0,t_0-t)} u_t \left(u_{tt} - c^2 \Delta u\right) \; dx - \int_{\partial B(x_0,t_0-t)} c^2 u_t(x,t) \; n \;\; \operatorname{grad} u(x,t) \; dS(x) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0,t_0-t)} u_t^2(x,t) + c^2 |\operatorname{grad} u(x,t)|^2 \; dS(x) \\
&= - \int_{\partial B(x_0,t_0-t)} c^2 u_t(x,t) \; n \;\; \operatorname{grad} u(x,t) - \frac{1}{2} u_t^2(x,t) - \frac{1}{2} c^2 |\operatorname{grad} u(x,t)|^2 \; dS(x)
\end{aligned}$$

mit $n$, dem Einheitsnormalenvektor zu $dS(y)$. Außerdem gilt

$$\left| c^2 u_t(x,t) \; n \;\; \operatorname{grad} u(x,t) \right| \leq |u_t(x,t)| \left| c^2 \operatorname{grad} u(x,t) \right| \leq \frac{1}{2} u_t^2(x,t) + \frac{1}{2} c^2 \left|\operatorname{grad} u(x,t)\right|^2$$

und somit $\partial_t e(t) \leq 0$, weshalb wir $e(t) \leq e(0) = 0$ erhalten, weil $u$ und $u_t$ in $B(x_0, ct_0)$ verschwinden. Folglich ist $u_t = |\operatorname{grad} u| = 0$ in $B(x_0, c(t_0 - t))$ und deshalb $u$ konstant in $C$. Da $u = 0$ in $B(x_0, ct_0)$ vorgegeben ist, folgt $u = 0$ in ganz $C$. $\square$

Eine Störung außerhalb von $B(x_0, ct_0)$ wird also die Lösung innerhalb $C$ nicht beeinflussen, was bedeutet, dass die Wellengleichung eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzt.

Der Einflussbereich eines Punktes $(x_0, t_0)$ ist folglich durch den nach oben geöffneten Kegel

$$\left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| \; t_0 \leq t, \;\; |x_0 - x| \leq c(t - t_0) \right\}$$

gegeben.

(3) Angenommen, $u(x,t)$ und $\mu(x,t)$ lösen die Wellengleichung, so wird diese auch durch $\nu(x,t) = u(x,t) + \mu(x,t)$ gelöst, denn es gilt

$$\nu_{tt}(x,t) - \Delta\nu(x,t) = u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \mu_{tt}(x,t) - \Delta\mu(x,t) = 0.$$

Die Überlagerung zweier Wellen stellt also wieder eine Welle dar, das heißt es gilt das Superpositionsprinzip.

(1) Analog zu Lawrence Evans [1, Kap. 2.4.3a] sei $u$ eine Lösung des allgemeinen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}, \\ u_t &= h && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}, \end{aligned}$$

wobei die Anfangsdaten einen kompakten Träger besitzen. Angenommen, $\tilde{u}$ löst ebenfalls dieses Problem, dann gilt für $w = u - \tilde{u}$ nach Eigenschaft (3)

$$\begin{aligned} w_{tt} - \Delta w &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ w &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}, \\ w_t &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{aligned}$$

Für die Energie $e(t)$, definiert durch

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} w_t^2(x,t) + |\operatorname{grad} w(x,t)|^2 \, dx,$$

folgt mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} \partial_t e(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} w_t w_{tt} + (\operatorname{grad} w)^T \operatorname{grad} w_t \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} w_t \left( w_{tt} - \Delta w \right) \, dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

denn die Randterme verschwinden, da $w$ aufgrund von Eigenschaft (4) einen kompakten Träger besitzt.

Wir haben somit bewiesen, dass für die homogene Wellengleichung Energieerhaltung gilt.

Mit den Anfangsdaten $w(x,0) = w_t(x,0) = 0$ folgt

$$e(t) = e(0) = 0,$$

weshalb $w_t$ und $\operatorname{grad} w(x,t)$ verschwinden und $w(x,t)$ konstant ist. Durch die Anfangsbedingung ist $w(x,0) = 0$ und somit auch für alle Zeiten $t$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also eindeutig.

(2) Die Regularität der Lösungen werden in Kapitel 5.2.2 anhand ihrer expliziten Darstellungen 5.2.7, 5.2.16, 5.2.18 und 5.2.21 untersucht.

Kommen wir nun zu den Charakteristiken der Wellengleichung. Die Hyperebene $s$ normal zu $\nu = (\tau, \xi)$ durch den Ursprung ist durch

$$s(t,x) = t\tau + x\xi = 0$$

gegeben. Für den Vektor $p = \left( \frac{-x\xi}{\tau}, x \right)$ gilt

$$\nu p = \frac{-x\xi}{\tau}\tau + x\xi = 0.$$

$p$ liegt also parallel zu $s$. Wir drücken die Wellengleichung durch die neuen Koordinaten $s$ und $p$ aus. Zunächst gilt

$$\partial_t = \tau \partial_s, \qquad \partial_{x_i} = \xi_i \partial_s + \partial_{p_i} - \frac{\xi_i}{\tau} \partial_{p_0},$$

weshalb mit $\partial_p = (\partial_{p_1}, \dots, \partial_{p_n})$

$$\begin{aligned} 0 &= u_{tt} - c^2 \Delta u \\ &= \left(\tau^2 - c^2 \xi^2\right) \partial_s^2 u - c^2 \left( \partial_p^2 + \frac{\xi^2}{\tau^2} \partial_{p_0}^2 + 2\xi \partial_s \partial_p - 2\frac{\xi^2}{\tau} \partial_s \partial_{p_0} - 2\frac{\xi}{\tau} \partial_{p_0} \partial_p \right) u \end{aligned}$$

folgt. Somit ist $s$ für $\tau^2 = c^2 \xi^2$ charakteristisch. Wir betrachten den charakteristischen Doppelkegel im Ursprung (siehe Abbildung 5.3) definiert durch

$$C = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, x^2 \leq c^2 t^2 \right\}.$$

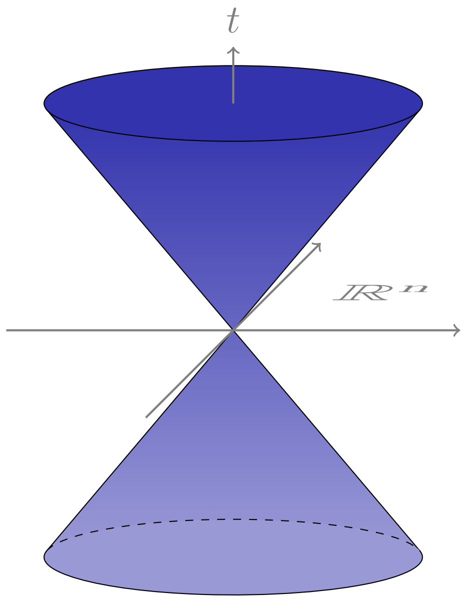


Abbildung 5.3: Der charakteristische Doppelkegel im Ursprung.

Dieser besitzt den Normalenvektor $n_\pm = (\pm c|x|, -x)$, wobei das Plus für Zeiten $t \geq 0$ und das Minus für Zeiten kleiner Null steht, denn für einen beliebigen Punkt $\omega \in \partial C$ gilt $\omega = (\pm \frac{|x|}{c}, x)$ und deshalb $n_\pm \ \omega = 0$. $\omega$ stellt somit einen beliebigen Vektor in der Hyperebene normal zu $n_\pm$ dar. $n_\pm$ erfüllt außerdem $\tau^2 = c^2 x^2 = c^2 \xi^2$, weshalb die Hyperebene charakteristisch ist. Da $w \in \partial C$ beliebig gewählt wurde, ist jede tangentiale Hyperebene an $C$ charakteristisch und somit $\partial C$ selbst.

Angenommen, $u$ ist eine schwache Lösung der Wellengleichung mit unstetiger Ableitung in der Hyperebene $S$ mit Normalenvektor $(\tau, \xi)$, die ein Gebiet $V$ in $V_l$ und $V_r$ teilt (siehe Abbildung 5.4) und $v$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger in $V$. Mittels

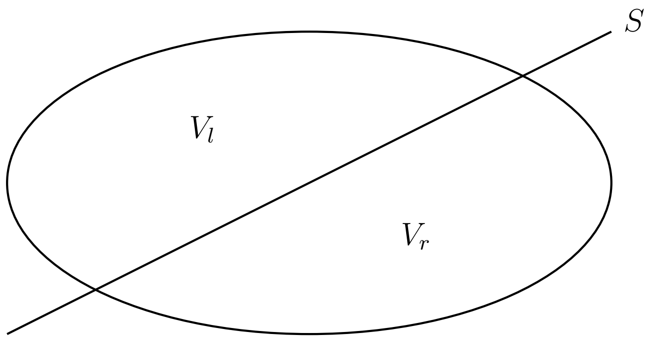


Abbildung 5.4: $V$ wird von $S$ in $V_l$ und $V_r$ geteilt.[b]

mehrdimensionaler partieller Integration

$$\int_V (\partial_i \phi)\, \psi \; dV = \int_{\partial V} \phi \psi \; n_i \; dS - \int_V \phi \, (\partial_i \psi) \; dV$$

beziehungsweise

$$\int_V \psi \; \partial_{ii} \phi \; dV = \int_{\partial V} (\psi \; \partial_i \phi - \phi \; \partial_i \psi)\, n_i \; dS + \int_V \phi \; \partial_{ii} \psi \; dV$$

folgt dann

$$\begin{aligned}
0 &= \int_V u(\partial_{tt} - c^2 \Delta) v \; dxdt \\
&= \int_{V_l} u(\partial_{tt} - c^2 \Delta) v \; dxdt + \int_{V_r} u(\partial_{tt} - c^2 \Delta) v \; dxdt \\
&= \int_{V_l} v(\partial_{tt} - c^2 \Delta) u \; dxdt + \int_{V_r} v(\partial_{tt} - c^2 \Delta) u \; dxdt \\
&\quad + \int_{\partial V_l} \left( n_{l,0} \, (u \; \partial_t v - v \; \partial_t u) - c^2 \sum_{i=1}^{n} n_{l,i} \, (u \; \partial_{x_i} v - v \; \partial_{x_i} u) \right) \; dA_l \\
&\quad + \int_{\partial V_r} \left( n_{r,0} \, (u \; \partial_t v - v \; \partial_t u) - c^2 \sum_{i=1}^{n} n_{r,i} \, (u \; \partial_{x_i} v - v \; \partial_{x_i} u) \right) \; dA_r .
\end{aligned}$$

$u_{tt} - c^2 \Delta u$ verschwindet in beiden Hälften $V_l$ und $V_r$. Außerdem gilt $v = 0$ auf $\partial V$, weshalb wir

$$\begin{aligned}
0 = &\int_{S_l} \left( n_{l,0} \, (u \; \partial_t v - v \; \partial_t u) - c^2 \sum_{i=1}^{n} n_{l,i} \, (u \; \partial_{x_i} v - v \; \partial_{x_i} u) \right) \; dS_l \\
&+ \int_{S_r} \left( n_{r,0} \, (u \; \partial_t v - v \; \partial_t u) - c^2 \sum_{i=1}^{n} n_{r,i} \, (u \; \partial_{x_i} v - v \; \partial_{x_i} u) \right) \; dS_r .
\end{aligned}$$

erhalten. $S_l$ und $S_r$ beschreiben die selben Flächen, lediglich der Normalenvektor ist entgegengesetzt orientiert, wodurch

$$0 = \int_S n_0 \, ([u] \; \partial_t v - v \; [\partial_t u]) - c^2 \sum_{i=1}^{n} n_i \, ([u] \; \partial_{x_i} v - v \; [\partial_{x_i} u]) \; dS$$

[b]Die Graphik ist der von Peter Lax [5, S. 27, Abb. 3.1] nachempfunden.

folgt, wobei $[u]$ der Differenz von $u$ auf beiden Seiten von $S$ entspricht. Der Normalenvektor zu $S$ ist durch $(\tau, \xi)$ gegeben und analog zu Kapitel 3.1 ist $p = \left(\frac{-x\xi}{\tau}, x\right)$ parallel zu $s$. Außerdem gilt

$$\partial_t = \tau \partial_s, \qquad \partial_{x_i} = \xi_i \partial_s + \partial_{p_i} - \frac{\xi_i}{\tau} \partial_{p_0},$$

weshalb wir

$$\begin{aligned}
0 = &\int_S \tau^2 \left([u]\ \partial_s v - v\ [\partial_s u]\right) - c^2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \left([u]\ \partial_s v - v\ [\partial_s u]\right) \\
&\quad - c^2 \sum_{i=1}^n \xi_i \left([u]\ \partial_{p_i} v - v\ [\partial_{p_i} u]\right) + c^2 \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i^2}{\tau} \left([u]\ \partial_{p_0} v - v\ [\partial_{p_0} u]\right)\ dS \\
= &\int_S \left(\tau^2 - c^2 \xi^2\right) \left([u]\ \partial_s v - v\ [\partial_s u]\right)\ dS \\
&\quad + c^2 \int_S \sum_{i=1}^n \xi_i \left([u]\ \left(\frac{\xi_i}{\tau} \partial_{p_0} - \partial_{p_i}\right) v + v \left[\left(\partial_{p_i} - \frac{\xi_i}{\tau} \partial_{p_0}\right) u\right]\right)\ dS
\end{aligned}$$

erhalten. Die Ableitungen in $p$, also parallel zu $s$ und $u$ sind stetig. Außerdem ist $v$ eine beliebige, glatte Funktion mit kompaktem Träger in $V$, weshalb

$$\left(\tau^2 - c^2 \xi^2\right) [\partial_s u] = 0$$

folgt. Für $\tau^2 \neq c^2 \xi^2$ gilt $\partial_s u_l = \partial_s u_r$ und die Ableitung in $u$ hat keinen Sprung in $S$, was einen Widerspruch zur Grundannahme darstellt. Somit erfüllt $S$ die Voraussetzung einer charakteristischen Ebene. Es wurde also bewiesen, dass Sprünge in Ableitungen schwacher Lösungen der Wellengleichung nur an charakteristischen Flächen auftreten können.

Insgesamt konnten wir zeigen, dass die Wellengleichung eine strikt hyperbolische Differentialgleichung ist, Eigenschaften (1), (3), (4) und Energieerhaltung erfüllt und haben die charakteristischen Flächen genauer untersucht.

## 5.2 Lösung der Wellengleichung

Wir wollen nun versuchen, die in Kapitel 5.1 prognostizierte Lösung zu finden. Dafür untersuchen wir zunächst das homogenen Anfangswertproblems

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \tag{5.2.1a}$$

$$u = g \qquad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \tag{5.2.1b}$$

$$u_t = h \qquad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \tag{5.2.1c}$$

wobei wir nach Lawrence Evans [1, Kap. 2.4.1, 2.4.2] vorgehen. Sei dazu zunächst $c = 1$.

### 5.2.1 Das eindimensionale Anfangswertproblem

Für $n = 1$ können wir den Differentialoperator $\partial_{tt} - \partial_{xx}$ faktorisieren und erhalten

$$\left(\partial_t + \partial_x\right)\left(\partial_t - \partial_x\right) u = u_{tt} - u_{xx} = 0.$$

Wir definieren

$$v(x,t) = (\partial_t - \partial_x)\, u(x,t), \tag{5.2.2}$$

was uns zur Transportgleichung

$$v_t + v_x = 0 \tag{5.2.3}$$

führt. Wir müssen also einen Spezialfall der allgemeinen homogenen Transportgleichung

$$u_t + b \ \operatorname{grad} u = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{5.2.4a}$$

$$u = g \qquad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \tag{5.2.4b}$$

mit $b \in \mathbb{R}^n$ lösen, wobei wir wieder Lawrence Evans [1, Kap. 2.1] folgen. Sei $z$ durch

$$z(s) = u(x+sb, t+s)$$

definiert, so ist $s = \text{const}$, denn mit Gleichung 5.2.4a gilt

$$\partial_s z(s) = \operatorname{grad} u(x+sb,t+s)\ b + u_t(x+sb,t+s) = 0.$$

Die Gerade $(x+sb, t+s)$ schneidet die $t=0$ Hyperebene für $s=-t$ in $(x-tb,0)$. Somit erhalten wir durch die Anfangsbedingung 5.2.4b die Lösung

$$u(x,t) = z(0) = z(-t) = u(x-tb,0) = g(x-tb)$$

des Anfangswertproblems 5.2.4a,b. Gleichung 5.2.3 wird also von einer Funktion der Form

$$v(x,t) = \mu(x-t)$$

gelöst, wodurch nach Gleichung 5.2.2

$$u_t(x,t) - u_x(x,t) = \mu(x-t) \tag{5.2.5}$$

folgt. Um diese Transportgleichung zu lösen untersuchen wir das Anfangswertproblem der allgemeinen inhomogenen Transportgleichung

$$u_t + b \ \operatorname{grad} u = f \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \tag{5.2.6a}$$

$$u = g \qquad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \tag{5.2.6b}$$

Analog zum homogenen Fall definieren wir $z$ durch $z(s) = u(x+sb,t+s)$ und erhalten

$$\partial_s z(s) = \operatorname{grad} u(x+sb,t+s)\ b + u_t(x+sb,t+s) = f(x+sb,t+s),$$

was uns zu

$$\begin{aligned}
u(x,t) - g(x-bt) &= u(x,t) - u(x-bt,0) \\
&= z(0) - z(-t) \\
&= \int_{-t}^{0} \partial_s z(s)\ ds \\
&= \int_{-t}^{0} f(x+sb,t+s)\ ds \\
&= \int_{0}^{t} f(x+(s-t)b,s)\ ds
\end{aligned}$$

führt. Somit löst

$$u(x,t) = \int_0^t f(x+(s-t)b, s)\ ds + g(x-bt)$$

das Anfangswertproblem 5.2.6a,b. Gleichung 5.2.5 wird also durch eine Funktion der Form

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t v(x+(s-t)b, s)\ ds + \gamma(x+t) \\ &= \int_0^t \mu(x+t-2s)\ ds + \gamma(x+t) \\ &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \mu(y)\ dy + \gamma(x+t) \end{aligned}$$

gelöst. $\gamma$ und $\mu$ müssen so gewählt werden, dass $u$ die Anfangsdaten 5.2.1b,c erfüllt. Für $t = 0$ folgt

$$\gamma(x) = u(x,0) = g(x),$$

weshalb nach Gleichung 5.2.5

$$\mu(x) = u_t(x,0) - u_x(x,0) = h(x) - g_x(x)$$

gilt, wodurch

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\ dy, \tag{5.2.7}$$

die *Formel von d'Alembert*, das Anfangswertproblem 5.2.1a,b,c für $n = 1$ löst.

***Satz 5.1***
*Für $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ und $u(x,t)$ gegeben durch die Formel von d'Alembert 5.2.7 gilt*

*(i)* $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty))$,

*(ii)* $u_{tt} - u_{xx} = 0 \qquad$ *in* $\mathbb{R} \times (0,\infty)$,

*(iii)* $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}, t>0}} u(x,t) = g(x_0)$, $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}, t>0}} u_t(x,t) = h(x_0)$ *für alle* $x_0 \in \mathbb{R}$.

*Beweis*

*(i)* Die Behauptung folgt aus der Definition von $u$.

*(ii)* Striktes Rechnen ergibt

$$u_{tt} = \frac{1}{2}\left(g''(x+t) + g''(x-t) + h'(x+t) - h'(x-t)\right) = u_{xx}.$$

*(iii)* Auch hier folgt durch striktes Ausrechnen

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R},t>0}} u(x,t) &= g(x_0),\\
\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R},t>0}} u_t(x,t) &= \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R},t>0}} \frac{1}{2}\left(g'(x+t) - g'(x-t) + h(x+t) + h(x-t)\right)\\
&= h(x_0).
\end{aligned}$$

□

Eine Anwendung dieser Formel findet sich bei folgendem Anfangsrandwertproblem

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty), \tag{5.2.8a}$$
$$u = g \qquad \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\}, \tag{5.2.8b}$$
$$u_t = h \qquad \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\}, \tag{5.2.8c}$$
$$u = 0 \qquad \text{auf } \{x=0\} \times (0,\infty). \tag{5.2.8d}$$

Dieses Problem spiegelt beispielsweise eine in $x = 0$ festgehaltene Saite wider. Durch Punktspiegelung in $x = 0$ erweitern wir das Problem auf ganz $\mathbb{R}$ und erhalten ein Anfangswertproblem der Form 5.2.1, denn mit $\tilde{u}$, $\tilde{g}$ und $\tilde{h}$ definiert durch

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x,t) &= \begin{cases} u(x,t) & (x \geq 0, t \geq 0),\\ -u(-x,t) & (x < 0, t \geq 0),\end{cases}\\
\tilde{g}(x,t) &= \begin{cases} g(x) & (x \geq 0),\\ -g(-x) & (x < 0),\end{cases}\\
\tilde{h}(x,t) &= \begin{cases} h(x) & (x \geq 0),\\ -h(-x) & (x < 0),\end{cases}
\end{aligned}$$

geht das Anfangsrandwertproblem 5.2.8a,b,c,d in

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty),\\
\tilde{u} &= \tilde{g} && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t=0\},\\
\tilde{u}_t &= \tilde{h} && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t=0\}
\end{aligned}$$

über. Dies wird nach Satz 5.1 durch

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)\ dy$$

gelöst. Mit der Definition von $\tilde{h}$ folgt für $x < t$

$$\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)dy = \int_{x-t}^{t-x} \tilde{h}(y)dy + \int_{t-x}^{x+t} \tilde{h}(y)dy = \int_{t-x}^{x+t} \tilde{h}(y)dy,$$

da $\tilde{h}$ punktsymmetrisch ist. Somit löst $u$, gegeben durch

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\, dy & \text{für } 0 \le t \le x, \\ \frac{1}{2}\left(g(t+x) - g(t-x)\right) + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{x+t} h(y)\, dy & \text{für } 0 \le x \le t, \end{cases} \tag{5.2.10}$$

das Anfangsrandwertproblem 5.2.8a,b,c,d. Für $h = 0$ auf ganz $\mathbb{R}_+$ teilt sich eine Anfangsauslenkung in zwei Störungen auf, wobei sich eine in positive und eine in negative $x$ Richtung bewegt. Trifft die nach links laufende Störung das festgehaltene Ende $x = 0$, so wird sie gespiegelt und läuft anschließend mit umgekehrter Auslenkung nach rechts.

## 5.2.2 Das mehrdimensionale Anfangswertproblem

Wir möchten nun das Problem 5.2.1a,b,c für $n \ge 2$ untersuchen. Hierzu definieren wir für $r > 0$ die *sphärischen Mittelwerte* durch

$$\begin{aligned} U(x,r,t) &= \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t)\, dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y,t)\, dS(y), \\ G(x,r) &= \fint_{\partial B(x,r)} g(y)\, dS(y) \quad = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} g(y)\, dS(y), \\ H(x,r) &= \fint_{\partial B(x,r)} h(y)\, dS(y) \quad = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} h(y)\, dS(y), \end{aligned}$$

wobei $\alpha(n)$ das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ darstellt. Anschaulich entspricht diese Definition der Bildung des Durchschnittswertes der Funktion im Ball $B(x,r)$. Angenommen, $u$ löst das Anfangswertproblem der mehrdimensionale Wellengleichung 5.2.1a,b,c, dann löst $U$ die *Euler-Poisson-Darboux Gleichungen*

$$U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty), \tag{5.2.11a}$$

$$U = G \qquad \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \tag{5.2.11b}$$

$$U_t = H \qquad \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \tag{5.2.11c}$$

denn für ein beliebiges, festes $x \in \mathbb{R}^n$ folgt mit $z = \frac{y-x}{r}$, Gaußschem Integralsatz und Gleichung 5.2.1a

$$\begin{aligned} U_r(x,r,t) &= \partial_r \left( \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y,t)\, dS(y) \right) \\ &= \partial_r \left( \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz,t)\, dS(z) \right) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \operatorname{grad} u(y,t)\, \frac{y-x}{r}\, dS(y) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y,t)\, dy \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} u_{tt}(y,t)\, dy. \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Somit folgt

$$r^{n-1}U_r(x,r,t) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(x,r)} u_{tt}(y,t)\ dy,$$

was durch Differentiation

$$\begin{aligned}
\left((n-1)r^{n-2} + r^{n-1}\partial_r\right) U_r(x,r,t) &= \partial_r \left(r^{n-1}U_r(x,r,t)\right) \\
&= \partial_r \left(\frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(x,r)} u_{tt}(y,t)\ dy\right) \\
&= \frac{1}{n\alpha(n)} \partial_r \left(\int_0^r \rho^{n-1} \int_{\partial B(0,1)} u_{tt}(x+\rho y,t)\ dS(y)\ d\rho\right) \\
&= \frac{1}{n\alpha(n)} r^{n-1} \int_{\partial B(0,1)} u_{tt}(x+ry,t)\ dS(y) \\
&= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(x,r)} u_{tt}(y,t)\ dS(y) \\
&= r^{n-1}U_{tt}(x,r,t)
\end{aligned}$$

ergibt. Wir erhalten somit

$$\frac{n-1}{r}U_r(x,r,t) + U_{rr}(x,r,t) = U_{tt}(x,r,t)$$

und haben Gleichung 5.2.11a bewiesen. Gleichungen 5.2.11b,c folgen aus den Definitionen von $U$, $G$ und $H$

$$\begin{aligned}
U(x,r,0) &= \fint_{\partial B(x,r)} u(y,0)\ dS(y) = \fint_{\partial B(x,r)} g(y)\ dS(y) = G(x,r), \\
U_t(x,r,0) &= \fint_{\partial B(x,r)} u_t(y,0)\ dS(y) = \fint_{\partial B(x,r)} h(y)\ dS(y) = H(x,r).
\end{aligned}$$

Wir untersuchen zunächst den Fall ungerader Raumdimension $n = 2k+1$ mit $k \in \mathbb{N}$ und erhalten dadurch eine Lösung für gerades $n$ mit Hilfe der *Abstiegsmethode*. Seien $\tilde{U}$, $\tilde{G}$ und $\tilde{H}$ für ein festes $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ und $t \geq 0$ durch

$$\begin{aligned}
\tilde{U}(r,t) &= \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1} \left(r^{2k-1}U(x,r,t)\right), \\
\tilde{G}(r) &= \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1} \left(r^{2k-1}G(x,r)\right), \\
\tilde{H}(r) &= \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1} \left(r^{2k-1}H(x,r)\right)
\end{aligned}$$

definiert. Angenommen, $u \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ löst das Anfangswertproblem 5.2.1a,b,c, so löst $\tilde{U}$

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty), \\
\tilde{U} &= \tilde{G} && \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\}, \\
\tilde{U}_t &= \tilde{H} && \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\}, \\
\tilde{U} &= 0 && \text{auf } \{r=0\} \times (0,\infty),
\end{aligned}$$

denn mit Lemma D.1(ii), $n = 2k+1$ und Gleichung 5.2.11a folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{rr} &= \partial_{rr} \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} U(x,r,t)\right) \\
&= \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k} \left(r^{2k} U_r\right) \\
&= \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1} \left(2kr^{2k-2} U_r + r^{2k-1} U_{rr}\right) \\
&= \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} \left(\frac{n-1}{r} U_r + U_{rr}\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} U_{tt}\right) \\
&= \tilde{U}_{tt}
\end{aligned}$$

für $r > 0$. Für $t = 0$ und $r > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tilde{U}(r,0) &= \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} U(x,r,0)\right) = \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} G(x,r)\right) = \tilde{G}, \\
\tilde{U}_t(r,0) &= \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} U_t(x,r,0)\right) = \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} H(x,r)\right) = \tilde{H}.
\end{aligned}$$

Nach Lemma D.1(iii) gilt

$$\tilde{U}(r,t) = \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} U(x,r,t)\right) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{j,k} r^{j+1} \partial_r^j U(r), \tag{5.2.14}$$

wodurch $\tilde{U}(0,t) = 0$ folgt. Mittels Gleichung 5.2.10 bekommen wir für $0 \le r \le t$ die Lösungsformel

$$\tilde{U}(r,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r)\right) + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(y)\, dy. \tag{5.2.15}$$

Nach der Definition von $U$ gilt

$$U(x,r,t) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t)\, dS(y) = \fint_{\partial B(0,1)} u(x+rz,t)\, dS(z),$$

weshalb für $r \to 0$

$$\lim_{r\to 0} U(x,r,t) = u(x,t)$$

folgt. Durch Gleichung 5.2.14 erhalten wir

$$\lim_{r\to 0} \frac{\tilde{U}(r,t)}{\beta_{0,k} r} = \lim_{r\to 0} U(x,r,t) = u(x,t).$$

Mit Hilfe der Lösungsformel 5.2.15 können wir somit

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\beta_{0,k}} \lim_{r\to 0} \left(\frac{1}{2r}\left(\tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r)\right) + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(y)\, dy\right) \\
&= \frac{1}{\beta_{0,k}} \left(\partial_t \tilde{G}(t) + \tilde{H}(t)\right)
\end{aligned}$$

berechnen, wodurch nach Einsetzen der Definitionen von $\tilde{G}, \tilde{H}, G, H$ und $n = 2k+1$

$$u(x,t) = \frac{1}{\gamma_n}\left(\partial_t\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x,t)} g(y)\ dS(y)\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x,t)} h(y)\ dS(y)\right)\right), \quad (5.2.16)$$

mit $\gamma_n = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-4)\cdot(n-2)$ für $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$ hervorgeht, was wir in folgendem Satz festhalten.

***Satz 5.2 Lösung der Wellengleichung in ungeraden Dimensionen***

*Für ungerade $n \geq 3$, $p \geq 2$, $g \in C^{\frac{n-1}{2}+p}(\mathbb{R}^n)$, $h \in C^{\frac{n-3}{2}+p}(\mathbb{R}^n)$ und $u$ definiert durch Gleichung 5.2.16 gilt*

*(i)* $u \in C^p(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$,

*(ii)* $u_{tt} - \Delta u = 0 \quad$ *in* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$,

*(iii)* $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} u(x,t) = g(x_0)$, $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} u_t(x,t) = h(x_0)$ *für alle* $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

*Beweis*

*(i)* Mit Lemma D.1(iii) erhalten wir

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\gamma_n}\left(\partial_t\left(\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} \beta_{j,\frac{n-1}{2}} t^{j+1}\partial_t^j G(x,t)\right) + \sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} \beta_{j,\frac{n-1}{2}} t^{j+1}\partial_t^j H(x,t)\right) \\
&= \frac{1}{\gamma_n}\left(\partial_t\left(\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} \beta_{j,\frac{n-1}{2}} t^{j+1}\partial_t^j \fint_{\partial B(x,t)} g(y)\ dS(y)\right)\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} \beta_{j,\frac{n-1}{2}} t^{j+1}\partial_t^j \fint_{\partial B(x,t)} h(y)\ dS(y)\right) \\
&= \frac{1}{\gamma_n}\left(\partial_t\left(\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} \beta_{j,\frac{n-1}{2}} t^{j+1}\partial_t^j \fint_{\partial B(0,1)} g(x+tz)\ dS(z)\right)\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} \beta_{j,\frac{n-1}{2}} t^{j+1}\partial_t^j \fint_{\partial B(0,1)} h(x+tz)\ dS(z)\right),
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

*(ii)* Sei zunächst $g = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x,t)} h(y)\ dS(y)\right) \\
&= \frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}H(x,t)\right),
\end{aligned}$$

weshalb mit Lemma D.1(ii)

$$u_{tt}(x,t) = \frac{1}{\gamma_n}\partial_{tt}\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}H(x,t)\right) = \frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(t^{n-1}H_t(x,t)\right)$$

folgt. Analog zu den Berechnungen 5.2.12 erhalten wir

$$H_t(x,t) = \frac{1}{n\alpha(n)t^{n-1}}\int_{B(x,t)} \Delta h(y)\, dy,$$

was zusammen

$$\begin{aligned}
u_{tt}(x,t) &= \frac{1}{\gamma_n n\alpha(n)}\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-1}{2}}\int_{B(x,t)} \Delta h(y)\, dy \\
&= \frac{1}{\gamma_n n\alpha(n)}\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-1}{2}}\int_0^t \tau^{n-1}\int_{\partial B(0,1)} \Delta h(x+\tau z)\, dS(z)\, d\tau \\
&= \frac{1}{\gamma_n n\alpha(n)}\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\int_{\partial B(0,1)} \Delta h(x+tz)\, dS(z)\right) \\
&= \frac{1}{\gamma_n n\alpha(n)}\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{1}{t}\int_{\partial B(0,t)} \Delta h(x+y)\, dS(y)\right) \\
&= \frac{1}{\gamma_n n\alpha(n)}\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{1}{t}\int_{\partial B(0,t)} \Delta_x h(x+y)\, dS(y)\right) \\
&= \Delta_x\frac{1}{\gamma_n n\alpha(n)}\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{1}{t}\int_{\partial B(x,t)} h(y)\, dS(y)\right) \\
&= \Delta_x\frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}⨍_{\partial B(x,t)} h(y)\, dS(y)\right) \\
&= \Delta u(x,t)
\end{aligned}$$

ergibt. Analog folgt für $h \equiv 0$

$$\begin{aligned}
u_{tt}(x,t) &= \frac{1}{\gamma_n}\partial_{ttt}\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}⨍_{\partial B(x,t)} g(y)dS(y)\right) \\
&= \frac{1}{\gamma_n}\partial_{ttt}\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}G(x,t)\right) \\
&= \frac{1}{\gamma_n}\partial_t\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(t^{n-1}G_t(x,t)\right) \\
&= \frac{1}{\gamma_n n\alpha(n)}\partial_t\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\int_{B(x,t)} \Delta g(y)\, dy\right) \\
&= \frac{1}{\gamma_n n\alpha(n)}\partial_t\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{1}{t}\int_{\partial B(x,t)} \Delta g(y)\, dy\right) \\
&= \Delta_x\frac{1}{\gamma_n}\partial_t\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}⨍_{\partial B(x,t)} g(y)\, dy\right) \\
&= \Delta u(x,t).
\end{aligned}$$

*(iii)* Durch Lemma D.1(iii) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,t>0}} u(x,t)\\
&= \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,t>0}} \frac{1}{\gamma_n}\left(\partial_t\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\Big(t^{n-2}G(x,t)\Big)+\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\Big(t^{n-2}H(x,t)\Big)\right)\\
&= \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,t>0}} \frac{1}{\gamma_n}\left(\partial_t\left(\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}}\beta_{j,\frac{n-1}{2}}t^{j+1}\partial_t^j G(x,t)\right)+\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}}\beta_{j,\frac{n-1}{2}}t^{j+1}\partial_t^j H(x,t)\right)\\
&= \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,t>0}} \frac{1}{\gamma_n}\left(\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}}\beta_{j,\frac{n-1}{2}}(j+1)t^j\partial_t^j G(x,t)+\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}}\beta_{j,\frac{n-1}{2}}t^{j+1}\partial_t^{j+1} G(x,t)\right)\\
&= \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,t>0}} \frac{1}{\gamma_n}\beta_{0,\frac{n-1}{2}}G(x,t)\\
&= \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,t>0}} ⨍_{\partial B(x,t)} g(y)\ dS(y)\\
&= \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,t>0}} ⨍_{\partial B(0,1)} g(x+ty)\ dS(y)\\
&= ⨍_{\partial B(0,1)} g(x_0)\ dS(y) = g(x_0).
\end{aligned}
$$

Ähnlich wie im Beweis von (ii) folgt für $h\equiv 0$ mit Lemma D.1(ii) und (iii)

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,t>0}} u_t(x,t) &= \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,t>0}} \frac{1}{\gamma_n}\partial_{tt}\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\Big(t^{n-2}G(x,t)\Big)\\
&= \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,t>0}} \frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-1}{2}}\Big(t^{n-1}G_t(x,t)\Big)\\
&= \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,t>0}} \frac{1}{\gamma_n n\alpha(n)}\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\int_{B(x,t)}\Delta g(y)\ dy\right)\\
&= \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,t>0}} \frac{1}{\gamma_n n\alpha(n)}\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{1}{t}\int_{\partial B(x,t)}\Delta g(y)\ dy\right)\\
&= \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,t>0}} \frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}⨍_{\partial B(x,t)}\Delta g(y)\ dy\right)\\
&= \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n,t>0}} \frac{1}{\gamma_n}\left(\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}}\beta_{j,\frac{n-1}{2}}t^{j+1}\partial_t^j ⨍_{\partial B(x,t)}\Delta g(y)\ dy\right)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Somit kommen wir mit Hilfe von Lemma D.1(iii) zu

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} u_t(x,t)\\
&\quad= \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} \frac{1}{\gamma_n}\left(\partial_{tt}\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}G(x,t)\right)+\partial_t\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}H(x,t)\right)\right)\\
&\quad= \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} \frac{1}{\gamma_n}\left(\partial_t\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}H(x,t)\right)\right)\\
&\quad= \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} \frac{1}{\gamma_n}\left(\partial_t\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}}\beta_{j,k}t^{j+1}\partial_t^j H(x,t)\right)\\
&\quad= \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} \frac{1}{\gamma_n}\left(\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}}\beta_{j,k}\left((j+1)t^j\partial_t^j H(x,t)+t^{j+1}\partial_t^{j+1}H(x,t)\right)\right)\\
&\quad= \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} \frac{1}{\gamma_n}\beta_{0,k}H(x,t)\\
&\quad= \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} \fint_{\partial B(x,t)} h(y)\; dS(y)\\
&\quad= \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} \fint_{\partial B(0,1)} h(x+tz)\; dS(z)\\
&\quad= \fint_{\partial B(0,1)} h(x_0)\; dS(z)\\
&\quad= h(x_0).
\end{aligned}
$$

□

Für $n=3$ erhalten wir aus Gleichung 5.2.16 die *Kirchhoffsche Formel*

$$u(x,t)=\partial_t\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x,t)} g(y)\; dS(y)\right)+\frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x,t)} h(y)\; dS(y).$$

Wir kommen nun zum Fall gerader Raumdimension. Hierfür nutzen wir die *Abstiegsmethode*, wobei wir das Anfangswertproblem im $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ als Problem im $\mathbb{R}^{n+1}\times(0,\infty)$ auffassen.

Sei also $n$ gerade und löse $u$ das Anfangswertproblem 5.2.1a,b,c, dann löst $\tilde{u}$ definiert durch

$$\tilde{u}(x_1,\dots,x_{n+1},t)=u(x_1,\dots,x_n,t)$$

das Anfangswertproblem

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_{tt}-\Delta\tilde{u}&=0 && \text{in } \mathbb{R}^{n+1}\times(0,\infty),\\
\tilde{u}&=\tilde{g}(x_1,\dots,x_{n+1})=g(x_1,\dots,x_n) && \text{auf } \mathbb{R}^{n+1}\times\{t=0\},\\
\tilde{u}_t&=\tilde{h}(x_1,\dots,x_{n+1})=h(x_1,\dots,x_n) && \text{auf } \mathbb{R}^{n+1}\times\{t=0\}.
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir nach Gleichung 5.2.16 für ein festes $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$

$$u(x,t) = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \left( \partial_t \left( \frac{1}{t} \partial_t \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^{n-1} ⨍_{\partial \tilde{B}(\tilde{x}_0,t)} \tilde{g}(\tilde{y})\ dS(\tilde{y}) \right) \right.$$
$$\left. + \left( \frac{1}{t} \partial_t \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^{n-1} ⨍_{\partial \tilde{B}(\tilde{x}_0,t)} \tilde{h}(\tilde{y})\ dS(\tilde{y}) \right) \right),$$

wobei $\partial \tilde{B}(\tilde{x}, t)$ den Rand des $(n+1)$-dimensionalen Balles um $\tilde{x}_0 = (x_1, \ldots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit Radius $t$ darstellt. Wir definieren $\phi$ durch

$$\phi(y) = \sqrt{t^2 - |x-y|^2},$$

wodurch

$$\left\{ (y, \phi(y), t) \in \mathbb{R}^{n+1} \times (0,\infty) \middle| y \in B(x,t) \right\}$$

die 'obere' und

$$\left\{ (y, -\phi(y), t) \in \mathbb{R}^{n+1} \times (0,\infty) \middle| y \in B(x,t) \right\}$$

die 'untere' Hemisphäre von $\partial \tilde{B}(\tilde{x}_0, t)$ widerspiegelt. Nach Transformationssatz folgt somit

$$\begin{aligned}
⨍_{\partial \tilde{B}(\tilde{x}_0,t)} \tilde{g}(\tilde{y})\ dS(\tilde{y}) &= \frac{1}{(n+1)\alpha(n+1)t^n} \int_{\partial \tilde{B}(\tilde{x}_0,t)} \tilde{g}(\tilde{y})\ dS(\tilde{y}) \\
&= \frac{2}{(n+1)\alpha(n+1)t^n} \int_{B(x,t)} g(y) \sqrt{1 + |D\phi(y)|^2}\ dy \\
&= \frac{2}{(n+1)\alpha(n+1)t^{n-1}} \int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}}\ dy \\
&= \frac{2\alpha(n)t}{(n+1)\alpha(n+1)} ⨍_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}}\ dy.
\end{aligned}$$

Für die Eulersche Gammafunktion $\Gamma$ gilt

$$\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) = \left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi} \prod_{j=0}^{\frac{n}{2}} \frac{2j+1}{2}$$
$$\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)! = \left(\frac{n}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{4}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{2}\right) = \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{2j}{2}$$

weshalb wir mit $\alpha(n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$ den Vorfaktor $\frac{1}{\gamma_n}$ durch

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma_n} &= \frac{2\alpha(n)}{\gamma_{n+1}(n+1)\alpha(n+1)} \\
&= \frac{\prod_{j=0}^{\frac{n}{2}}(2j+1)}{\gamma_{n+1}(n+1)\prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} 2j} \\
&= \frac{1}{\prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} 2j}
\end{aligned}$$

erhalten. Analog folgt

$$\frac{1}{\gamma_{n+1}} \fint_{\partial \tilde{B}(\tilde{x}_0,t)} \tilde{h}(\tilde{y})\, dS(\tilde{y}) = \frac{t}{\gamma_n} \fint_{B(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\, dy,$$

weshalb wir zur Lösung

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{\gamma_n} \Bigg( \partial_t \left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^n \fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\, dy \right) \\ + \left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^n \fint_{B(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\, dy \right) \Bigg) \end{aligned} \tag{5.2.18}$$

kommen.

***Satz 5.3 Lösung der Wellengleichung in geraden Dimensionen***
*Für gerade $n \geq 2$, $p \geq 2$, $g \in C^{\frac{n}{2}+p}(\mathbb{R}^n)$, $h \in C^{\frac{n-2}{2}+p}(\mathbb{R}^n)$ und $u$ definiert durch Gleichung 5.2.18 gilt*

*(i)* $u \in C^p(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$,

*(ii)* $u_{tt} - \Delta u = 0 \quad$ *in* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$,

*(iii)* $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} u(x,t) = g(x_0)$, $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} u_t(x,t) = h(x_0)$ *für alle* $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Da wir das $n$-dimensionale Anfangswertproblem als Spezialfall des $n+1$-dimensionalen Anfangswertproblems auffassen konnten, folgt der Beweis aus Satz 5.2. Für $n = 2$ erhalten wir die *Formel von Poisson*

$$u(x,t) = \partial_t \left( \frac{1}{2\pi} \int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\, dy \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{B(x,t)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\, dy.$$

Bis jetzt haben wir uns mit dem Spezialfall der Wellengleichung auseinandergesetzt, in dem die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = 1$ gesetzt wurde. Dies lässt sich jedoch mit einem Wechsel der Variablen verallgemeinern. Löse dazu $w(x,\phi)$ die Wellengleichung in ungeraden Dimensionen

$$\begin{aligned} w_{\phi\phi}(x,\phi) - \Delta w(x,\phi) &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ w(x) &= g(x) && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{\phi = 0\}, \\ w_\phi(x) &= \tilde{h}(x) && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{\phi = 0\}, \end{aligned}$$

so ist $w$ nach Gleichung 5.2.16 durch

$$\begin{aligned} w(x,\phi) = \frac{1}{\gamma_n} \Bigg( \partial_\phi \left(\frac{1}{\phi}\partial_\phi\right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \phi^{n-2} \fint_{\partial B(x,\phi)} g(y)\, dS(y) \right) \\ + \left(\frac{1}{\phi}\partial_\phi\right)^{\frac{n-3}{2}} \left( \phi^{n-2} \fint_{\partial B(x,\phi)} \tilde{h}(y)\, dS(y) \right) \Bigg) \end{aligned}$$

gegeben. Wir setzen $\phi = ct$, weshalb $\partial_\phi = \frac{1}{c}\partial_t$ gilt und das Anfangswertproblem in

$$\begin{aligned} w_{tt}(x,ct) - c^2\Delta w(x,ct) &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ w(x,0) &= g(x) && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{\phi = 0\}, \\ w_t(x,0) &= c\tilde{h}(x) && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{\phi = 0\}, \end{aligned}$$

übergeht. Nun substituieren wir $h(x) \equiv c\tilde{h}(x)$, wodurch $u$ definiert durch

$$\begin{aligned} u(x,t) = w(x,ct) = \frac{1}{\gamma_n}\Bigg(\partial_t\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x,ct)} g(y)\; dS(y)\right) \\ + \left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x,ct)} h(y)\; dS(y)\right)\Bigg) \end{aligned}$$

das gewünschte Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - c^2\Delta u(x,t) &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= g(x) && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \\ u_t(x,0) &= h(x) && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

löst. Analog folgt für gerade $n$

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{\gamma_n}\Bigg(\partial_t\left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^{n}\fint_{B(x,ct)} \frac{c\; g(y)}{\sqrt{(ct)^2 - |x-y|^2}}\; dy\right) \\ + \left(\frac{1}{t}\partial_t\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^{n}\fint_{B(x,ct)} \frac{c\; h(y)}{\sqrt{(ct)^2 - |x-y|^2}}\; dy\right)\Bigg) \end{aligned}$$

und für $n = 1$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+ct) + g(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\; dy.$$

Wir wollen nun das inhomogene Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \\ u_t &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

lösen, wobei wir nach dem *Prinzip von Duhamel* vorgehen. Sei dazu $v(x,t,s)$ für alle $s \in (0,\infty)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} v_{tt}(x,t,s) - \Delta v(x,t,s) &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times (s,\infty), \\ v(x,t,s) &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = s\}, \\ v_t(x,t,s) &= f(x,s) && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = s\} \end{aligned}$$

und $u$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in (0,\infty)$ definiert durch

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t,s)\; ds. \tag{5.2.21}$$

Mit $\lfloor x \rfloor = \max\left\{k \in \mathbb{Z} \middle| k \leq x\right\}$ erhalten wir folgenden Satz.

***Satz 5.4***

*Für* $n \geq 2, p \geq 2,\ f \in C^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor + p}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ *und* $u$ *definiert durch Gleichung 5.2.21 gilt*

*(i)* $u \in C^p(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$,

*(ii)* $u_{tt} - \Delta u = f \quad$ *in* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$,

*(iii)* $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} u(x,t) = 0, \lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} u_t(x,t) = 0$ *für alle* $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

*Beweis*

*(i)* Für ungerade $n$ ist $f \in C^{\frac{n-3}{2}+p}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Nach Satz 5.2.16 gilt $v(x,t,s) \in C^p(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ für alle $s \geq 0$, wodurch auch $u(x,t) \in C^p(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ ist.
Für gerade $n$ ist $f \in C^{\frac{n-2}{2}+p}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Für alle $s \geq 0$ folgt mittels Satz 5.2.18 $v(x,t,s) \in C^p(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ und somit $u(x,t) \in C^p(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$.

*(ii)* Mit $a(t) = t$ gilt

$$\begin{aligned}
u_t(x,t) &= \partial_t \left( \int_0^{a(t)} v(x,t,s)\ ds \right) \\
&= \frac{da}{dt} \partial_a \int_0^{a(t)} v(x,t,s)\ ds + \int_0^{a(t)} v_t(x,t,s)\ ds \\
&= v(x,t,t)\ ds + \int_0^t v_t(x,t,s)\ ds \\
&= \int_0^t v_t(x,t,s)\ ds
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
u_{tt}(x,t) &= v_t(x,t,t) + \int_0^t v_{tt}(x,t,s)\ ds \\
&= f(x,t) + \int_0^t \Delta v(x,t,s)\ ds \\
&= f(x,t) + \Delta \int_0^t v(x,t,s)\ ds \\
&= f(x,t) + \Delta u(x,t).
\end{aligned}$$

*(iii)* Es gilt

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} u(x,t) = \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} \int_0^t v(x,t,s)\ ds = 0$$

und

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} u_t(x,t) = \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} \int_0^t v_t(x,t,s)\ ds = 0.$$

□

Das allgemeine inhomogene Anfangswertproblem der Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \\ u_t &= h && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

wird folglich durch die Superposition der Lösung des homogenen Problems 5.2.7, 5.2.16 beziehungsweise 5.2.18 und der des inhomogenen Problems 5.2.21 gelöst.

### Huygenssches Prinzip

Anhand von Gleichung 5.2.16 erkennt man, dass in ungeraden Raumdimensionen $n \geq 3$ die Lösung nur von Randpunkten des Kegels beeinflusst wird. Dies ist das *Huygenssche Prinzip*. Eine Störung breitet sich demnach in Form einer Wellenfront aus. Für gerade Dimensionen zeigt Gleichung 5.2.18, dass eine bei $x$ lokalisierte Anfangsstörung die Lösung an einem anderen Punkt $y$ nach endlicher Zeit erreicht, und dort für alle Zeiten beeinflusst. Das Huygenssche Prinzip ist somit verletzt. Auch im allgemeinem Eindimensionalen Fall wird es verletzt, was Gleichung 5.2.7 zeigt. Ist jedoch $h(x) \equiv 0$ so unterliegt die Lösung ihm auch hier.

### Regularität

Mit Hilfe von Satz 5.1(i) folgt, dass die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung nicht an Differenzierbarkeit verliert. Für $n \geq 2$ erhalten wir nach Satz 5.2(i), beziehungsweise Satz 5.3(i) einen Verlust an Regularität. Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ folgen jedoch aus unendlich oft differenzierbaren Anfangsdaten unendlich oft differenzierbare Lösungen. Die Wellengleichung erfüllt somit auch Eigenschaft (2) aus Kapitel 2.1.

# 6 Zusammenfassung

Wir haben gezeigt, dass lineare, translationsinvariante Systeme, die für genügend glatte Anfangsbedingungen eine eindeutige, sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitende, glatte Lösung besitzen, hyperbolischen Differentialgleichungen genügen. Anschließend konnte bewiesen werden, dass strikt hyperbolische, lineare, translationsinvariante Differentialgleichungen für glatte Anfangsbedingungen eine glatte, eindeutige, sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitende Lösung besitzen. Des Weiteren wurde deutlich, dass charakteristische Flächen eine bedeutende Rolle für diese Lösung spielen und Energieerhaltung gilt.

Danach lösten wir uns von der festen Raumzeit und untersuchten ein hyperbolisches System mit zeit- und ortsabhängigen Koeffizienten. Auch hier konnten wir eine eindeutige Lösungen nachweisen und zeigen, dass sich Information mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet.

Abschließend haben wir uns der Wellengleichung, dem Paradebeispiel einer strikt hyperbolischen Differentialgleichung, gewidmet. Auch hier konnten die vorherigen Ergebnisse verifiziert werden. Wir haben gesehen, dass der charakteristische Doppelkegel mit Spitze in einem Punkt dem Einfluss- beziehungsweise Abhängigkeitsbereich dieses Punktes entspricht und konnten auch hier Energieerhaltung feststellen. Zu guter Letzt haben wir die vorher prognostizierte Lösung hergeleitet.

# Appendix A

Wir wollen die Fouriertransformation von $(1-x^2)^m$ und $x\,(1-x^2)^m$ berechnen. Nach Binomischem Lehrsatz gilt

$$\left(1-x^2\right)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k x^{2k}.$$

Für die Fouriertransformation der auf $-1 \leq x \leq 1$ beschränkten Funktion $g_k(x) = x^{2k}$ folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_k(w) = \int_{-1}^{1} x^{2k} e^{-iwx} dx &= \frac{-1}{iw} \left(x^{2k} e^{-iwx}\right)\Big|_{-1}^{1} - \frac{-1}{iw} 2k \int_{-1}^{1} x^{2k-1} e^{-iwx} dx \\
&= \frac{-1}{iw} \left(e^{-iw} - e^{iw}\right) - 2k \left(\frac{-1}{iw}\right)^2 \left(x^{2k-1} e^{-iwx}\right)\Big|_{-1}^{1} \\
&\qquad + 2k(2k-1) \left(\frac{-1}{iw}\right)^2 \int_{-1}^{1} x^{2k-2} e^{-iwx} dx \\
&= \frac{-1}{iw} \left(e^{-iw} - e^{iw}\right) - 2k \left(\frac{-1}{iw}\right)^2 \left(e^{-iw} + e^{iw}\right) + 2k(2k-1) \left(\frac{-1}{iw}\right)^2 \tilde{g}_{k-1}(w).
\end{aligned}$$

Für $k = 0$ erhalten wir

$$\tilde{g}_0(w) = \int_{-1}^{1} e^{-iwx} dx = \frac{-1}{iw} \left(e^{-iwx}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{-1}{iw} \left(e^{-iw} - e^{iw}\right),$$

was induktiv

$$\tilde{g}_k(w) = \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \frac{(2k)!}{(2k-j)!} \left(\frac{-1}{iw}\right)^{j+1} \left(e^{-iw} + (-1)^{j+1} e^{iw}\right)$$

ergibt. Wir kommen somit insgesamt zu

$$\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^m e^{-iwx} dx = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{2k} \binom{m}{k} (-1)^k \frac{(2k)!}{(2k-j)!} \left(\frac{1}{iw}\right)^{j+1} \left((-1)^j e^{iw} - e^{-iw}\right) \tag{A.0.1}$$

und wollen nun die Vorfaktoren dieser Gleichung berechnen.

***Lemma A.1***
*Für $m \in \mathbb{N}$, $k, p \in \mathbb{N}_0$ und $p < m$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k k^p = 0.$$

*Beweis*
Wir führen eine Induktion nach $m$ durch.
Induktionsanfang: Für $m = 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} (-1)^k k^0 = 1 - 1 = 0.$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k k^p = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und $p < m$.
Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^k k^p &= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m}{k} (-1)^k k^p + \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m}{k-1} (-1)^k k^p \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k k^p + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} (-1)^k k^p \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k k^p - \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k (k+1)^p \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k (k^p - (k+1)^p) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \sum_{l=0}^{p-1} \binom{p}{l} k^l \\
&= \sum_{l=0}^{p-1} \binom{p}{l} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k k^l = 0.
\end{aligned}$$

□

Hieraus folgt sofort, dass für jedes Polynom $f(k)$ dessen Grad $m - 1$ nicht übersteigt

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k f(k) = 0 \tag{A.0.2}$$

gilt. $\frac{(2k)!}{(2k-j)!}$ ist ein Polynom mit Grad $j$ in $k$, wodurch wir

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \frac{(2k)!}{(2k-j)!} = 0 \tag{A.0.3}$$

für $j < m$ erhalten.

***Lemma A.2***
*Für $m \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \frac{(2k)!}{(2k-m)!} = (-2)^m m!$$

*Beweis*
Wir berechnen

$$\frac{(2k)!}{(2k-m)!} = \prod_{j=0}^{m-1}(2k-j) = (2k)^m + \sum_{l=0}^{m-1} c_l k^l$$

mit Konstanten $c_l$. Nach Gleichung A.0.2 verschwindet die Summe

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k \sum_{l=0}^{m-1} c_l k^l,$$

weshalb wir

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k \frac{(2k)!}{(2k-m)!} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k(2k)^m$$

erhalten. Der Rest folgt per Induktion über $m$.
Induktionsanfang: Für $m = 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}(-1)^k(2k)^1 = 0 - 2 = (-2)^1 1!$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k(2k)^m = (-2)^m m!$ für ein $m \in \mathbb{N}$.
Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}(-1)^k(2k)^{m+1} &= \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m}{k}(-1)^k(2k)^{m+1} + \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m}{k-1}(-1)^k(2k)^{m+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k(2k)^{m+1} + \sum_{k=1}^{m+1}\binom{m}{k-1}(-1)^k(2k)^{m+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k(2k)^{m+1} - \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k(2k+2)^{m+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k 2^{m+1}(k^{m+1} - (k+1)^{m+1}) \\
&= -\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k 2^{m+1} \sum_{l=0}^{m}\binom{m+1}{l} k^l \\
&= -\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k 2^{m+1}\left(\binom{m+1}{m}k^m + \sum_{l=0}^{m-1}\binom{m+1}{l}k^l\right) \\
&= -\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k 2^{m+1}(m+1)k^m \\
&= -2(m+1)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k(2k)^m = -2(m+1)(-2)^m m! \\
&= (-2)^{m+1}(m+1)!
\end{aligned}$$

□

Zusammen mit Gleichungen A.0.1 und A.0.3 erhalten wir somit

$$\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^m e^{-iwx}dx = (-2)^m m!\left(\frac{1}{iw}\right)^{m+1}\left((-1)^m e^{iw}-e^{-iw}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{w^{m+2}}\right). \quad \text{(A.0.4)}$$

Analog folgt für die Fouriertransformation der auf $-1 \leq x \leq 1$ beschränkten Funktion $h_k(x) = x^{2k+1}$

$$\begin{aligned}\tilde{h}_k(w) = \int_{-1}^{1} x^{2k+1}e^{-iwx}dx &= \frac{-1}{iw}\left(x^{2k+1}e^{-iwx}\right)\Big|_{-1}^{1} - \frac{-1}{iw}(2k+1)\int_{-1}^{1}x^{2k}e^{-iwx}dx\\
&=\frac{-1}{iw}\left(e^{-iw}+e^{iw}\right)-(2k+1)\left(\frac{-1}{iw}\right)^2\left(x^{2k}e^{-iwx}\right)\Big|_{-1}^{1}\\
&\qquad + (2k+1)2k\left(\frac{-1}{iw}\right)^2\int_{-1}^{1}x^{2k-1}e^{-iwx}dx\\
&=\frac{-1}{iw}\left(e^{-iw}+e^{iw}\right)-(2k+1)\left(\frac{-1}{iw}\right)^2\left(e^{-iw}-e^{iw}\right)+(2k+1)2k\left(\frac{-1}{iw}\right)^2\tilde{h}_{k-1}(w).\end{aligned}$$

Für $k = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\tilde{h}_0(w) = \int_{-1}^{1} xe^{-iwx}dx &= \frac{-1}{iw}\left(xe^{-iwx}\right)\Big|_{-1}^{1} - \frac{-1}{iw}\int_{-1}^{1}e^{-iwx}dx\\
&=\frac{-1}{iw}\left(e^{-iw}+e^{iw}\right)-\left(\frac{-1}{iw}\right)^2\left(e^{-iw}-e^{iw}\right),\end{aligned}$$

was induktiv

$$\tilde{h}_k(w) = \sum_{j=0}^{2k+1}(-1)^j\frac{(2k+1)!}{(2k+1-j)!}\left(\frac{-1}{iw}\right)^{j+1}\left(e^{-iw}+(-1)^j e^{iw}\right),$$

und somit

$$\int_{-1}^{1}x\left(1-x^2\right)^m e^{-iwx}dx = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{2k+1}\binom{m}{k}(-1)^k\frac{(2k+1)!}{(2k+1-j)!}\left(\frac{1}{iw}\right)^{j+1}\left((-1)^{j+1}e^{iw}-e^{-iw}\right)$$

ergibt. Analog zu vorher ist $\frac{(2k+1)!}{(2k+1-j)!}$ ein Polynom in $k$ vom Grad $j$ und nach Gleichung A.0.2 folgt

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k\frac{(2k+1)!}{(2k+1-j)!}=0$$

für $j < m$. Für $j = m$ gilt auch hier

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k\frac{(2k+1)!}{(2k+1-m)!} &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k(2k)^m+\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k\sum_{l=0}^{m-1}c_l k^l\\
&=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k(2k)^m = (-2)^m m!,\end{aligned}$$

weshalb wir

$$\int_{-1}^{1}x\left(1-x^2\right)^m e^{-iwx}dx = (-2)^m m!\left(\frac{1}{iw}\right)^{m+1}\left((-1)^{m+1}e^{iw}-e^{-iw}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{w^{m+2}}\right)$$

und mit Gleichung A.0.4

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1+x)\left(1-x^2\right)^m e^{-iwx}dx &= (-2)^m m!\left(\frac{1}{iw}\right)^{m+1}\left((-1)^m e^{iw}-e^{-iw}\right)\\ &\quad+(-2)^m m!\left(\frac{1}{iw}\right)^{m+1}\left((-1)^{m+1}e^{iw}-e^{-iw}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{w^{m+2}}\right)\\ &=(2i)^{m+1}m!w^{-m-1}e^{-iw}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{w^{m+2}}\right)\end{aligned}$$

erhalten. Für $\xi \to \infty$ folgt somit

$$\int_{-1}^{1}(1+x)\left(1-x^2\right)^m e^{-iwx}dx = (2i)^{m+1}m!w^{-m-1}e^{-iw}$$

und in $k$ Raumdimensionen

$$\prod_{j=1}^{k}\int_{-1}^{1}(1+x_j)\left(1-x_j^2\right)^m e^{-iwx_j}dx_j = \left((2i)^{m+1}m!\right)^k e^{-i\sum_{j=1}^{k}w_j}\prod_{j=1}^{k}w_j^{-m-1}. \qquad \text{(A.0.5)}$$

# Appendix B

***Lemma B.1***
*Sei $\zeta \in \mathbb{C}^k$, so existiert zu jeder Nullstelle $\lambda(\zeta)$ eines charakteristischen Polynoms $P(\tau, \zeta)$ einer hyperbolischen Differentialgleichung eine Nullstelle $\sigma(\zeta)$ von $P_0(\tau, \zeta)$ mit*

$$\lambda(\zeta) = \sigma(\zeta) + o(\zeta).$$

*Beweis*
Sei $n$ der Grad von $P(\tau, \zeta)$ in $\tau$, so ist der Grad in $\zeta$ höchstens $n$ und $P_0(\tau, \zeta)$ stellt genau die Summanden von $P(\tau, \zeta)$ dar, deren Grad $n$ entspricht. Somit gilt

$$P(\tau, \zeta) = P_0(\tau, \zeta) + o(\tau^n) + o(|\zeta|^n).$$

Wir schreiben $P$ in Nullstellenform

$$P(\tau, \zeta) = \prod_{j=1}^{n} (\tau - \lambda_j(\zeta)) = \tau^n - \sum_{j=1}^{n} \tau^{n-1} \lambda_j(\zeta) + P'(\tau, \zeta) \tag{B.0.1}$$

und sehen, dass $\deg_\zeta \lambda_j(\zeta) \leq 1$ für alle $1 \leq j \leq n$ gelten muss, denn angenommen, es würde ein $\lambda_j$ mit $\deg_\zeta \lambda_j(\zeta) > 1$ existieren, so würde nach Gleichung B.0.1

$$\deg_\zeta P(\tau, \zeta) > \deg_\tau P(\tau, \zeta)$$

gelten, was einen Widerspruch zu Bedingung (i) in Definition 2.8 darstellt. Die Nullstellen von $P(\tau, \zeta)$ sind somit höchstens ersten Grades in $\zeta$. Wir schreiben also

$$\lambda(\zeta) = \lambda_0(\zeta) + \hat{\lambda}(\zeta)$$

mit $\hat{\lambda} \in o(\zeta)$ und $\lambda_0(\zeta) \in \Theta(\zeta)$ oder $\lambda_0(\zeta) = 0$. Da $P_0(\tau, \zeta)$ eine $n$-Form darstellt und $\lambda(\zeta)$ $P(\tau, \zeta)$ löst, folgt

$$\begin{aligned}
0 &= P(\lambda(\zeta), \zeta) \\
&= P_0(\lambda_0(\zeta) + \hat{\lambda}(\zeta), \zeta) + o(\lambda^n(\zeta)) + o(|\zeta|^n) \\
&= \sum_{|\alpha|+k=n} c_\alpha \zeta^\alpha (\lambda_0(\zeta) + \hat{\lambda}(\zeta))^k + o(|\zeta|^n) \\
&= \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha \zeta^\alpha + \sum_{\substack{|\alpha|+k=n \\ |\alpha| \neq n}} c_\alpha \zeta^\alpha (\lambda_0(\zeta) + \hat{\lambda}(\zeta))^k + o(|\zeta|^n) \\
&= \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha \zeta^\alpha + \sum_{\substack{|\alpha|+k=n \\ |\alpha| \neq n}} c_\alpha \zeta^\alpha \lambda_0^k(\zeta) + o(|\zeta|^n) \\
&= P_0(\lambda_0(\zeta), \zeta) + o(|\zeta|^n)
\end{aligned}$$

mit einem Multiindex $\alpha$. Nach Konstruktion gilt $P_0(\lambda_0(\zeta), \zeta) \in \Theta(|\zeta|^n)$ oder $P_0(\lambda_0(\zeta), \zeta) = 0$ und mit der vorherigen Rechnung kann der erste Fall nicht eintreten, weshalb $\lambda_0$ einer Nullstelle von $P_0$ entspricht. $\square$

# Appendix C

***Lemma C.1***
*Für positive Konstanten $K$ und $\lambda$ existiert ein $C > 0$, sodass*

$$\frac{Kk\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)+1}{1-Kk} \leq e^{Ck}$$

*für $0 \leq Kk \leq \frac{1}{2}$ gilt.*

*Beweis*
Für $Kk = 0$ gilt

$$\frac{Kk\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)+1}{1-Kk} = 1 = e^{\left(8+\frac{4}{\lambda}\right)Kk}.$$

Differentiation liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial(Kk)}\left(\frac{Kk\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)+1}{1-Kk}\right) &= \frac{\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)(1-Kk)+Kk\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)+1}{(1-Kk)^2} \\
&= \frac{2+\frac{1}{\lambda}}{(1-Kk)^2} \\
&\leq 8+\frac{4}{\lambda} \\
&\leq \left(8+\frac{4}{\lambda}\right)e^{\left(8+\frac{4}{\lambda}\right)Kk} \\
&= \frac{\partial}{\partial(Kk)}\left(e^{\left(8+\frac{4}{\lambda}\right)Kk}\right),
\end{aligned}$$

da $Kk$ auf $(0, \frac{1}{2})$ beschränkt ist. Wir haben somit in $\left(8+\frac{4}{\lambda}\right)K$ eine solche Konstante gefunden. □

# Appendix D

***Lemma D.1***
*Für $k \in \mathbb{N}$ und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^{k+1}$ gilt*

*(i)* $\left[r\partial_r, \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^k\right] = -2k\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^k$,

*(ii)* $\partial_{rr}\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right) = \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^k\left(r^{2k}\partial_r\phi(r)\right)$,

*(iii)* $\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right) = \sum_{j=0}^{k-1}\beta_{j,k}r^{j+1}\partial_r^j\phi(r)$ *mit Konstanten* $\beta_{j,k}$, *wobei* $\beta_{0,k} = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2k-1)$ *entspricht.*

$[A, B]$ *spiegelt hierbei den Kommutator* $A\ B - B\ A$ *wider.*

*Beweis*
Wir führen jeweils eine Induktion nach $k$ durch.

*(i)* Induktionsanfang: Für $k = 1$ gilt

$$\left[r\partial_r, \frac{1}{r}\partial_r\right] = r\left(-\frac{1}{r^2}\partial_r + \frac{1}{r}\partial_{rr}\right) - \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r}r\partial_{rr} = -2\frac{1}{r}\partial_r.$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\left[r\partial_r, \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^k\right] = -2k\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.
Induktionsschluss: Somit folgt

$$\begin{aligned}\left[r\partial_r, \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k+1}\right] &= \left[r\partial_r, \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^k\right]\left(\frac{1}{r}\partial_r\right) + \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^k\left[r\partial_r, \frac{1}{r}\partial_r\right] \\ &= -2k\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^k\left(\frac{1}{r}\partial_r\right) + \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^k\left(-2\frac{1}{r}\partial_r\right) \\ &= -2(k+1)\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k+1}.\end{aligned}$$

*(ii)* Induktionsanfang: Für $k = 1$ gilt

$$\begin{aligned}\partial_{rr}\left(r\phi(r)\right) &= \partial_r\phi(r) + \partial_r\left(r\partial_r\phi(r)\right) \\ &= 2\partial_r\phi(r) + r\partial_{rr}\phi(r) \\ &= \frac{1}{r}\partial_r\left(r^2\partial_r\phi(r)\right).\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\partial_{rr}\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right) = \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k}\left(r^{2k}\partial_r\phi(r)\right)$ für ein $k \in \mathbb{N}$.
Induktionsschluss: Mit (i) folgt

$$\begin{aligned}
\partial_{rr}\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k}\left(r^{2k+1}\phi(r)\right) &= \partial_{rr}\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left((2k+1)r^{2k-1}\phi(r) + r^{2k}\partial_r\phi(r)\right) \\
&= (2k+1)\partial_{rr}\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right) \\
&\quad + \partial_{rr}\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k}\partial_r\phi(r)\right) \\
&= (2k+1)\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k}\left(r^{2k}\partial_r\phi(r)\right) + \partial_{rr}\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k}\partial_r\phi(r)\right) \\
&= \left((2k+1)\left(\frac{1}{r}\partial_r\right) + \partial_r r\frac{1}{r}\partial_r\right)\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k}\partial_r\phi(r)\right) \\
&= (2k+1+\partial_r r)\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k}\left(r^{2k}\partial_r\phi(r)\right) \\
&= (2k+2+r\partial_r)\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k}\left(r^{2k}\partial_r\phi(r)\right) \\
&= \Bigg(\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k}(2k+2+r\partial_r) \\
&\quad + \left[(2k+2+r\partial_r)\,,\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k}\right]\Bigg)\left(r^{2k}\partial_r\phi(r)\right) \\
&= \left(\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k}(2k+2+r\partial_r) - 2k\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k}\right)\left(r^{2k}\partial_r\phi(r)\right) \\
&= \left(\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k}(2+r\partial_r)\right)\left(r^{2k}\partial_r\phi(r)\right) \\
&= \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k}\left(2r^{2k}\partial_r\phi(r) + r\left(2kr^{2k-1}\partial_r\phi(r) + r^{2k}\partial_{rr}\phi(r)\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k}\frac{1}{r}\left((2+2k)r^{2k+1}\partial_r\phi(r) + r^{2k+2}\partial_{rr}\phi(r)\right) \\
&= \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k+1}\left(r^{2(k+1)}\partial_r\phi(r)\right).
\end{aligned}$$

*(iii)* Induktionsanfang: Für $k = 1$ gilt

$$r\phi(r) = \sum_{j=0}^{0}\beta_{j,1}r^{j+1}\partial_r^j\phi(r).$$

Induktionsvoraussetzung: Für ein $k \in \mathbb{N}$ gelte

$$\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right) = \sum_{j=0}^{k-1}\beta_{j,k}r^{j+1}\partial_r^j\phi(r)$$

mit Konstanten $\beta_{j,k}$, wobei $\beta_{0,k} = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)$ entspricht.

Induktionsschluss: Mittels (ii) und partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^k \left(r^{2k+1}\phi(r)\right) &= (2k+1)\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right) + \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k}\partial_r\phi(r)\right) \\
&= (2k+1)\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right) \\
&\quad + \int r\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k}\left(r^{2k}\partial_r\phi(r)\right)\,dr \\
&= (2k+1)\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right) \\
&\quad + \int r\partial_{rr}\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right)\,dr \\
&= (2k+1)\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right) + r\partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right) \\
&\quad - \int \partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right)\,dr \\
&= (2k+1)\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right) + r\partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right) \\
&= 2k\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right) + r\partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\phi(r)\right) \\
&= 2k\sum_{j=0}^{k-1}\beta_{j,k}r^{j+1}\partial_r^j\phi(r) + r\partial_r\sum_{j=0}^{k-1}\beta_{j,k}r^{j+1}\partial_r^j\phi(r) \\
&= 2k\sum_{j=0}^{k-1}\beta_{j,k}r^{j+1}\partial_r^j\phi(r) + \sum_{j=0}^{k-1}(j+1)\beta_{j,k}r^{j+1}\partial_r^j\phi(r) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1}\beta_{j,k}r^{j+2}\partial_r^{j+1}\phi(r) \\
&= (2k+1)\beta_{0,k}r\phi(r) + \sum_{j=1}^{k}\beta_{j,k+1}r^{j+1}\partial_r^j\phi(r) \\
&= \beta_{0,k+1}r\phi(r) + \sum_{j=1}^{k}\beta_{j,k+1}r^{j+1}\partial_r^j\phi(r)
\end{aligned}$$

mit Konstanten $\beta_{j,k+1}$, wobei $\beta_{0,k+1} = (2k+1)\cdot(2k-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1$ gilt.

$\square$

# Literaturverzeichnis


[1] Lawrence Craig Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society. Providence, 1998.

[2] Lars Gårding. *Linear Hyperbolic Partial Differential Equations with Constant Coefficients*, *Acta Mathematica.* Volume 85. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 1951.

[3] Christian Gerthsen. *Physik - ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen.* Springer. 10. Auflage. Berlin, 1969.

[4] Fritz John. *Partial Differential Equations.* Springer. 3. Auflage. New York, 1978.

[5] Peter David Lax. *Hyperbolic Partial Differential Equations.* Courant Institute of Mathematical Sciences. New York, 2006.

[6] Jaak Peetre. *Réctification à l'Article „une Caractérisation Abstraite des Opérateurs Différentiels"*, *Mathematica Scandinavica.* Volume 8. Aarhus Universitet, Aarhus, 1960.

[7] Mohammed Amer Qazi, Qazi Ibadur Rahman *The Schwarz-Pick theorem and its applications*, *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, sectio A – Mathematica.* Volume 65, No 2. Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin, 2011.

[8] Jens Wirth. *Partielle Differentialgleichungen II.* Ludwig-Maximilians-Universität München, München, 2013. `http://www.iadm.uni-stuttgart.de/LstAnaMPhy/Wirth/Skripte/Skript-HypPDE.pdf`; aufgerufen am 19. Januar 2017

# Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig verfasst wurde. Es wurden keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet. Alle Zitate sind kenntlich gemacht. Außerdem liegt die Arbeit bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vor.

Fabian Bleitner

Würzburg, 14. Februar 2017